Programme de colle - Semaine 26

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Étude d'une intégrale fonction de ses bornes** Par exemple, déterminer les variations de la fonction H suivante :

$$\begin{array}{rccc} H & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_{-\sqrt{x}}^{x^3} \frac{1}{1+t^2+t^4}\ dt \end{array}$$

Démonstration.

- La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  Elle admet donc une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$H(x) \ = \ \int_{-\sqrt{x}}^{x^3} f(t)\ dt \ = \ [\ F(t)\ ]_{-\sqrt{x}}^{x^3} \ = \ F(x^3) - F(-\sqrt{x})$$

- La fonction $G : x \mapsto F(-\sqrt{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est la composée $G = F \circ g$ de :
  × $g : x \mapsto -\sqrt{x}$ qui est :
    - dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,
    - telle que : $g(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}$.
  × F qui est dérivable (car de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
  De même, la fonction $x \mapsto F(x^3)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
  On en déduit que la fonction G est de dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, car elle est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} H'(x) &= 3\,x^2 \times F'(x^3) - \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) F'(-\sqrt{x}) \\ &= 3\,x^2 \times f(x^3) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \times f(-\sqrt{x}) && \textit{(car } F \textit{ est un primitive de } f \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ &= \frac{3x^2}{1+(x^3)^2+(x^3)^4} + \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+(\sqrt{x})^2+(-\sqrt{x})^4)} \\ &= \frac{3x^2}{1+x^6+x^9} + \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x+x^2)} \end{aligned}$$

  Ainsi : $H'(x) > 0$.
  La fonction H est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

□

- **Calculs d'intégrales** : primitives à vue, IPP, changement de variable, somme de Riemann.
  Par exemple, démontrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

  Démonstration.
  - Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+n\,\frac{k}{n}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad \textit{(où } f : x \mapsto \frac{1}{1+x}\textit{)}\end{aligned}$$

  - La fonction f est continue sur $[0,1]$. La suite $\left(\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc convergente et :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \Big[\ \ln\big(|1+t|\big)\ \Big]_0^1 = \ln(2)$$

$\square$

- **Conservation de la structure d'ev par une application linéaire**
  Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
  Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

  1) H est un sev de E $\Rightarrow$ $f(H)$ est un sev de F

  2) G est un sev de F $\Rightarrow$ $f^{-1}(G)$ est un sev de E

  Démonstration.

  1) Supposons que H est un sous-espace vectoriel de E.
  - Tout d'abord, par définition de $f(H)$: $f(H) \subset F$.
  - Ensuite : $f(H) \neq \varnothing$ car $0_F \in f(H)$. En effet :
    × comme H est un sous-espace vectoriel de E, alors : $0_E \in H$.
    × comme f est linéaire : $0_F = f(0_E)$.
    Ainsi, il existe $x \in H$ tel que : $0_F = f(x)$.
  - Démontrons que $f(H)$ est stable par combinaison linéaire.
    Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(y_1, y_2) \in \big(f(H)\big)^2$.
    × Comme $y_1 \in f(H)$, alors il existe $x_1 \in H$ tel que : $y_1 = f(x_1)$.
    × Comme $y_2 \in f(H)$, alors il existe $x_2 \in H$ tel que : $y_2 = f(x_2)$.
    On en déduit :

$$\begin{aligned}\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 &= \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) \\ &= f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) \qquad \textit{(car } f \textit{ est linéaire)}\end{aligned}$$

    Or, comme $(x_1, x_2) \in H^2$ et H est un espace vectoriel, alors : $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in H$.
    On a bien démontré qu'il existe $u \in H$ tel que : $\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 = f(u)$.
    On en déduit : $\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 \in f(H)$.

2) Supposons que G est un sous-espace vectoriel de F.

- Tout d'abord, par définition de $f^{-1}(G)$: $f^{-1}(G) \subset E$.
- Ensuite : $f^{-1}(G) \neq \varnothing$ car $0_E \in f^{-1}(G)$. En effet :
  - $\times$ comme f est linéaire : $f(0_E) = 0_F$.
  - $\times$ de plus, comme G est un sous-espace vectoriel de F, alors : $0_F \in G$.

  Ainsi : $f(0_E) \in G$. D'où : $0_E \in f^{-1}(G)$.
- Démontrons que $f^{-1}(G)$ est stable par combinaison linéaire.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(x_1, x_2) \in \big(f^{-1}(G)\big)^2$.
  - $\times$ Comme $x_1 \in f^{-1}(G)$, alors : $f(x_1) \in G$.
  - $\times$ Comme $x_2 \in f^{-1}(G)$, alors : $f(x_2) \in G$.

  On en déduit, puisque f est linéaire :

  $$f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) \quad = \quad \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2)$$

  Or, comme $\big(f(x_1), f(x_2)\big) \in G^2$ et G est un espace vectoriel, alors : $\lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) \in G$.
  On a bien démontré : $f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) \in G$.
  On en déduit : $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in f^{-1}(G)$.

$\square$

- **Caractérisation de l'injectivité à l'aide du noyau**

  Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
  Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

  $$\text{L'application } f \text{ injective} \ \Leftrightarrow \ \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$$

Démonstration.

$(\Rightarrow)$ Supposons f injective. Démontrons que : $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

$(\supset)$ Comme f linéaire, $f(0_E) = 0_F$.
Ce qui démontre que : $\mathrm{Ker}(f) \supset \{0_E\}$.

$(\subset)$ Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi :

$$f(x) \quad = \quad 0_F \quad = \quad f(0_E)$$

L'application f étant injective, $x = 0_E$.
Ce qui démontre : $x \in \{0_E\}$.

$(\Leftarrow)$ Supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Démontrons que f est injective.

Soit $(x, y) \in E^2$. Supposons : $f(x) = f(y)$.
On a alors : $f(x) - f(y) = 0_F$, ce qui s'écrit :

$$f(x - y) = 0_F$$

Ainsi, $x - y \in \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, d'où $x - y = 0_E$ et $x = y$.

$\square$

- **Caractérisation de l'image en dimension finie**

  Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

  On suppose E de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ et on note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}\,(f(e_1), \ldots, f(e_p))$$

Démonstration.
Démonstration du point *2)*.

($\subset$) Soit $y \in \text{Im}(f)$.
Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Le vecteur x se décompose de manière unique sur $\mathscr{B}$. Autrement dit, il existe un unique p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ tel que :

$$x = x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_p \cdot e_p$$

Ainsi, par linéarité de f :

$$y = f(x) = x_1 \cdot f(e_1) + \cdots + x_p \cdot f(e_p)$$

Ainsi, $y \in \text{Vect}\,(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

($\supset$) Soit $y \in \text{Vect}\,(f(e_1), \ldots, f(e_p))$. Il existe alors $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$y = \lambda_1 \cdot f(e_1) + \ldots + \lambda_p \cdot f(e_p) = f\Big(\lambda_1 \cdot e_1 + \ldots + \lambda_p \cdot e_p\Big)$$

Ainsi, $y \in \text{Im}(f)$.

$\square$

Connaissances exigibles

Intégration

- Fonction en escalier : définition, propriétés
- Intégrale de fonctions en escalier : définition, propriétés
- Fonction continue par morceaux :
  - × définition,
  - × propriétés,
  - × approximation des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier.
- Intégrale des fonctions continues par morceaux : construction, propriétés
- Primitives de fonctions continues : définition, propriétés, théorème fondamental
- Étude d'intégrales fonctions de leurs bornes
- Techniques de majoration d'intégrales
- Changement de variable et parité ou périodicité
- Méthodes de calcul approché d'intégrales :
  - × somme de Riemann et méthode des rectangles,
  - × méthode des trapèzes.
- Formules de Taylor :
  - × formule de Taylor avec reste intégral,
  - × inégalité de Taylor-Lagrange,
  - × formule de Taylor-Young.
- Généralisation à des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Application linéaires

- Applications linéaires :
  - définition,
  - premières propriétés,
  - conservation de la structure d'espace vectoriel,
- Structure de l'ensemble des applications linéaires :
  - structure d'espace vectoriel,
  - composition d'applications linéaires : linéarité, puissance $k^{\text{ème}}$ d'un endomorphisme,
- Isomorphismes et automorphismes :
  - définition,
  - linéarité de l'application réciproque,
  - réciproque de la composée d'isomorphismes,
- Noyau d'une application linéaire :
  - définition,
  - structure d'espace vectoriel,
  - caractérisation de l'injectivité,
- Image d'une application linéaire :
  - définition,
  - structure d'espace vectoriel,
  - caractérisation de la surjectivité,
- Cas particulier de la dimension finie :
  - caractérisation de l'image en dimension finie,
  - caractérisation de l'injectivité / surjectivité / bijectivité par l'image d'une famille libre / génératrice / base,
  - rang d'une application linéaire,
  - théorème du rang,
  - caractérisation de l'injectivité / surjectivité / bijectivité par le rang,
  - détermination d'une application linéaire en dimension finie,

On sanctionnera fortement les points suivants :

- toute confusion d'objets,
- toute confusion variable libre / liée (ou muette),
- tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),
- toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),
- tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.