Programme de colle - Semaine 26

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Conservation de la structure d'ev par une application linéaire**

  Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
  Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

  1) H est un sev de E $\Rightarrow$ $f(H)$ est un sev de F

  2) G est un sev de F $\Rightarrow$ $f^{-1}(G)$ est un sev de E

  Démonstration.

  1) Supposons que H est un sous-espace vectoriel de E.

  - Tout d'abord, par définition de $f(H)$: $f(H) \subset F$.
  - Ensuite : $f(H) \neq \varnothing$ car $0_F \in f(H)$. En effet :

    × comme H est un sous-espace vectoriel de E, alors : $0_E \in H$.

    × comme f est linéaire : $0_F = f(0_E)$.

    Ainsi, il existe $x \in H$ tel que : $0_F = f(x)$.
  - Démontrons que $f(H)$ est stable par combinaison linéaire.
    Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(y_1, y_2) \in \big(f(H)\big)^2$.

    × Comme $y_1 \in f(H)$, alors il existe $x_1 \in H$ tel que : $y_1 = f(x_1)$.

    × Comme $y_2 \in f(H)$, alors il existe $x_2 \in H$ tel que : $y_2 = f(x_2)$.

    On en déduit :

    $$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 &= \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) \\ &= f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) \qquad \textit{(car } f \textit{ est linéaire)} \end{aligned}$$

    Or, comme $(x_1, x_2) \in H^2$ et H est un espace vectoriel, alors : $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in H$.
    On a bien démontré qu'il existe $u \in H$ tel que : $\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 = f(u)$.
    On en déduit : $\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 \in f(H)$.

2) Supposons que G est un sous-espace vectoriel de F.

- Tout d'abord, par définition de $f^{-1}(G)$: $f^{-1}(G) \subset E$.
- Ensuite : $f^{-1}(G) \neq \varnothing$ car $0_E \in f^{-1}(G)$. En effet :
  - $\times$ comme f est linéaire : $f(0_E) = 0_F$.
  - $\times$ de plus, comme G est un sous-espace vectoriel de F, alors : $0_F \in G$.

  Ainsi : $f(0_E) \in G$. D'où : $0_E \in f^{-1}(G)$.
- Démontrons que $f^{-1}(G)$ est stable par combinaison linéaire.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(x_1, x_2) \in \big(f^{-1}(G)\big)^2$.
  - $\times$ Comme $x_1 \in f^{-1}(G)$, alors : $f(x_1) \in G$.
  - $\times$ Comme $x_2 \in f^{-1}(G)$, alors : $f(x_2) \in G$.

  On en déduit, puisque f est linéaire :

$$f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) \quad = \quad \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2)$$

  Or, comme $\big(f(x_1), f(x_2)\big) \in G^2$ et G est un espace vectoriel, alors : $\lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) \in G$.
  On a bien démontré : $f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) \in G$.
  On en déduit : $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in f^{-1}(G)$.

$\square$

- **Réciproque d'un isomorphisme**

  Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
  Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
  Supposons que u est un isomorphisme de E dans F.

Alors l'application réciproque u^{-1} est un isomorphisme de F dans E.
(en particulier, $u^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$)

Démonstration.

- L'application $u^{-1} : F \to E$ est bijective en tant que réciproque de l'application $u : E \to F$ qui est elle-même bijective.
- Il reste à démontre que $u^{-1} : F \to E$ est linéaire.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(y_1, y_2) \in F^2$.
  L'application u étant surjective :
  - $\times$ il existe $x_1 \in E$ tel que : $y_1 = u(x_1)$.
    Ce qu'on peut aussi écrire : $x_1 = u^{-1}(y_1)$.
  - $\times$ il existe $x_2 \in E$ tel que : $y_2 = u(x_2)$.
    Ce qu'on peut aussi écrire : $x_2 = u^{-1}(y_2)$.

  On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} u^{-1}(\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2) & = & u^{-1}\Big(\lambda_1 \cdot u(x_1) + \lambda_2 \cdot u(x_2)\Big) \\ & = & u^{-1}\Big(u(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2)\Big) \\ & = & \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \\ & = & \lambda_1 \cdot u^{-1}(y_1) + \lambda_2 \cdot u^{-1}(y_2) \end{array}$$

  Ainsi, $u^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$.

$\square$

- **Caractérisation de l'injectivité à l'aide du noyau**

  Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
  Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\text{L'application } f \text{ injective } \Leftrightarrow \text{ Ker}(f) = \{0_E\}$$

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons f injective. Démontrons que : $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

  ($\supset$) Comme f linéaire, $f(0_E) = 0_F$.
  Ce qui démontre que : $\mathrm{Ker}(f) \supset \{0_E\}$.

  ($\subset$) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi :

$$f(x) \ = \ 0_F \ = \ f(0_E)$$

  L'application f étant injective, $x = 0_E$.
  Ce qui démontre : $x \in \{0_E\}$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Démontrons que f est injective.

  Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$.
  On a alors : $f(x) - f(y) = 0_F$, ce qui s'écrit :

$$f(x - y) = 0_F$$

  Ainsi, $x - y \in \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, d'où $x - y = 0_E$ et $x = y$.

□

- **Caractérisation de l'image en dimension finie**

  Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
  On suppose E de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ et on note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_p)\right)$$

Démonstration.
Démonstration du point *2)*.

($\subset$) Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$.
  Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Le vecteur x se décompose de manière unique sur $\mathscr{B}$.
  Autrement dit, il existe un unique p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ tel que :

$$x = x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_p \cdot e_p$$

  Ainsi, par linéarité de f :

$$y = f(x) = x_1 \cdot f(e_1) + \cdots + x_p \cdot f(e_p)$$

  Ainsi, $y \in \mathrm{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_n)\right)$.

($\supset$) Soit $y \in \mathrm{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_p)\right)$. Il existe alors $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$y = \lambda_1 \cdot f(e_1) + \ldots + \lambda_p \cdot f(e_p) = f\Big(\lambda_1 \cdot e_1 + \ldots + \lambda_p \cdot e_p\Big)$$

  Ainsi, $y \in \mathrm{Im}(f)$.

□

- **Propriétés des probabilités**

  Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

  1) $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}\left(\bar{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$. En particulier : $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

  2) $\forall (A,B) \in \left(\mathscr{P}(\Omega)\right)^2$, $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

  3) $\forall (A,B) \in \left(\mathscr{P}(\Omega)\right)^2$, $A \subset B \ \Rightarrow\ \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$
  (l'application $\mathbb{P}$ est croissante)

  4) $\forall (A,B) \in \left(\mathscr{P}(\Omega)\right)^2$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

  5) $\forall (A,B,C) \in \left(\mathscr{P}(\Omega)\right)^3$,
  $$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) & = & \mathbb{P}(A) \ + \ \mathbb{P}(B) \ + \ \mathbb{P}(C) \\ & - & \mathbb{P}(A \cap B) \ - \ \mathbb{P}(A \cap C) \ - \ \mathbb{P}(B \cap C) \\ & + & \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{array}$$
  (formule du crible)

  6) $\forall (A_k)_{k \in [\![1,n]\!]} \in \left(\mathscr{P}(\Omega)\right)^n$, $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) \ \leqslant\ \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$

  On demandera à l'étudiant de démontrer 3 propriétés parmi les 6

  Démonstration.

  1) On a : $A \cup \overline{A} = \Omega$ (réunion disjointe). Ainsi, par additivité :
  $$\mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

  2) On a : $(A \setminus B) \ \cup \ (A \cap B) = A$ (réunion disjointe).
  Ainsi, par additivité :
  $$\mathbb{P}((A \setminus B) \ \cup \ (A \cap B)) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$$

  3) Supposons $A \subset B$.
  D'après le point précédent : $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B)$.
  Or, comme $A \subset B$, on a $A \cap B = A$. Ainsi :
  $$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geqslant \mathbb{P}(A)$$

  4) On a : $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ (la deuxième réunion est disjointe).
  On en déduit, à l'aide du point ***2)*** que :
  $$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A \cup B) & = & \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) \\ & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \\ & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{array}$$

  5) Généralisation de la formule précédente :
  $$\begin{array}{cl} \multicolumn{2}{l}{\mathbb{P}(A \cup B \cup C)} \\ = & \mathbb{P}(A \cup (B \cup C)) \\ = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cup C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\ = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\ = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ & -\left(\ \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cap (A \cap C))\ \right) \\ = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ & -\mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) \\ & +\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{array}$$

6) On démontre par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$
où $\mathscr{P}(n)$: $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$

□

- **L'application $\mathbb{P}_B$ est une probabilité**

  Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.
  Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

L'application $\mathbb{P}_B$ suivante :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_B & : & \mathscr{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & & B & \mapsto & \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \end{array}$$

est une probabilité.

Démonstration.
Il s'agit de vérifier que $\mathbb{P}_B$ vérifie les axiomes d'une probabilité.

1) Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$.

- Comme $\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$ (car $\mathbb{P}(B) \neq 0$), on a : $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \geqslant 0$.
- Comme $A \cap B \subset B$, on a $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(B)$ et donc : $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \leqslant 1$.

2) $\mathbb{P}_B(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(B \cap \Omega)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$.

3) Soit $(A_1, A_2) \in \big(\mathscr{P}(\Omega)\big)^2$ un couple d'événements incompatibles. Alors :

$$\mathbb{P}_B(A_1 \cap A_2) = \frac{\mathbb{P}\big(B \cap (A_1 \cap A_2)\big)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\big((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)\big)}{\mathbb{P}(B)}$$

Notons alors $C_1 = B \cap A_1$ et $C_2 = B \cap A_2$.
Les événements C_1 et C_2 sont incompatibles. En effet :

$$C_1 \cap C_2 = (B \cap A_1) \cap (B \cap A_2) = B \cap (A_1 \cap A_2) = B \cap \varnothing = \varnothing$$

Par additivité de $\mathbb{P}$, on obtient alors :

$$\mathbb{P}\big((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)\big) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2)$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_B(A_1 \cup A_2) &= \frac{\mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(B \cap A_1)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(B \cap A_1)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \mathbb{P}_B(A_1) + \mathbb{P}_B(A_2) \end{aligned}$$

□

- **Formule des probabilités totales**

  Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $I \subset [\![1, n]\!]$.
  Soit $(A_i)_{i \in I} \in \big(\mathscr{P}(\Omega)\big)^I$ un système (quasi-)complet d'événements.
  Soit $B \in \mathscr{P}(\Omega)$.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(B) & = & \sum\limits_{i \in I} \mathbb{P}\big(B \cap A_i\big) \\ & = & \sum\limits_{i \in I} \mathbb{P}\big(B \,|\, A_i\big) \times \mathbb{P}(A_i) \end{array}$$

Démonstration.

- On commence par démontrer le lemme suivant.

  Lemme 1.

  Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini.*
  Soit $(A, B) \in \big(\mathscr{P}(\Omega)\big)^2$.
  On suppose $\mathbb{P}(B) = 1$.
  Alors : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$.

  Démonstration.
  Comme : $A \cup C \supset C$ alors, par croissance de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(A \cup C) \geqslant \mathbb{P}(C) = 1$$

  et comme $\mathbb{P}(A \cup C) \leqslant A$, on en conclut $\mathbb{P}(A \cup C) = 1$.
  D'autre part, par la formule du crible :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A \cap C) & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cup C) \\ & = & \mathbb{P}(A) + \cancel{1} - \cancel{1} \end{array}$$

  $\square$

- Comme $(A_i)_{i \in I}$ est un système quasi-complet : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) = 1$.
  Ainsi : $\mathbb{P}\left(B \cap \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) \right) = \mathbb{P}(B)$.
- Alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(B) & = & \mathbb{P}\left(B \cap \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) \right) & \\ & = & \mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{i \in I} (B \cap A_i) \Big) & \text{(par distributivité de la loi } \cap \text{ par rapport à la loi } \cup \text{)} \\ & = & \sum\limits_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i) & \text{(par additivité de } \mathbb{P} \text{)} \\ & = & \sum\limits_{i \in I} \mathbb{P}(B \,|\, A_i) \times \mathbb{P}(A_i) & \end{array}$$

$\square$

Connaissances exigibles

Application linéaires

- Applications linéaires :
  - × définition,
  - × premières propriétés,
  - × conservation de la structure d'espace vectoriel,
- Structure de l'ensemble des applications linéaires :
  - × structure d'espace vectoriel,
  - × composition d'applications linéaires : linéarité, puissance $k^{\text{ème}}$ d'un endomorphisme,
- Isomorphismes et automorphismes :
  - × définition,
  - × linéarité de l'application réciproque,
  - × réciproque de la composée d'isomorphismes,
- Noyau d'une application linéaire :
  - × définition,
  - × structure d'espace vectoriel,
  - × caractérisation de l'injectivité,
- Image d'une application linéaire :
  - × définition,
  - × structure d'espace vectoriel,
  - × caractérisation de la surjectivité,
- Cas particulier de la dimension finie :
  - × caractérisation de l'image en dimension finie,
  - × caractérisation de l'injectivité / surjectivité / bijectivité par l'image d'une famille libre / génératrice / base,
  - × rang d'une application linéaire,
  - × théorème du rang,
  - × rang d'une composée,
  - × caractérisation de l'injectivité / surjectivité / bijectivité par le rang,
  - × détermination d'une application linéaire en dimension finie,
- Formes linéaires :
  - × définition,
  - × caractérisation des hyperplans en dimension finie,
  - × équations d'un hyperplan dans une base.

Probabilité sur un univers fini

- Espace probabilisable, univers, événements, événement impossible, événement certain, événement contraire
- Réunion finie et intersection finie d'événements
- Événements incompatibles
- Système complet d'événements
- Espace probabilisé, probabilité, événement négligeable, événement quasi-certain, propriété vérifiée presque sûrement

- Propriétés des probabilités
- Probabilité uniforme
- Probabilité conditionnelle
- Formule des probabilités composées
- Système quasi-complet d'événements
- Formule des probabilités totales
- Formule de Bayes
- Indépendance de deux événements : définition, indépendance et événement contraire
- Indépendance mutuelle d'une famille d'événements : définition, indépendance mutuelle et événements contraires
- Méthode de calcul de probabilités

On sanctionnera fortement les points suivants :

× toute confusion d'objets,

× toute confusion variable libre / liée (ou muette),

× tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),

× toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),

× tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.