PCSI

Programme de colle - Semaine 25

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

- × si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.
- × si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Calculs d'intégrales** : primitives à vue, IPP, changement de variable, somme de Riemann.
- `Conservation de la structure d'ev par une application linéaire`

  Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
  Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

  1) H est un sev de E $\Rightarrow$ $f(H)$ est un sev de F

  2) G est un sev de F $\Rightarrow$ $f^{-1}(G)$ est un sev de E

  Démonstration.

  1) Supposons que H est un sous-espace vectoriel de E.

  - Tout d'abord, par définition de $f(H)$: $f(H) \subset F$.
  - Ensuite : $f(H) \neq \varnothing$ car $0_F \in f(H)$. En effet :
    - × comme H est un sous-espace vectoriel de E, alors : $0_E \in H$.
    - × comme f est linéaire : $0_F = f(0_E)$.

    Ainsi, il existe $x \in H$ tel que : $0_F = f(x)$.
  - Démontrons que $f(H)$ est stable par combinaison linéaire.
    Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(y_1, y_2) \in \big(f(H)\big)^2$.
    - × Comme $y_1 \in f(H)$, alors il existe $x_1 \in H$ tel que : $y_1 = f(x_1)$.
    - × Comme $y_2 \in f(H)$, alors il existe $x_2 \in H$ tel que : $y_2 = f(x_2)$.

    On en déduit :

    $$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 &= \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) \\ &= f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) \qquad \textit{(car } f \textit{ est linéaire)} \end{aligned}$$

    Or, comme $(x_1, x_2) \in H^2$ et H est un espace vectoriel, alors : $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in H$.
    On a bien démontré qu'il existe $u \in H$ tel que : $\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 = f(u)$.
    On en déduit : $\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 \in f(H)$.

2) Supposons que G est un sous-espace vectoriel de F.

- Tout d'abord, par définition de $f^{-1}(G)$: $f^{-1}(G) \subset E$.
- Ensuite : $f^{-1}(G) \neq \varnothing$ car $0_E \in f^{-1}(G)$. En effet :
  - $\times$ comme f est linéaire : $f(0_E) = 0_F$.
  - $\times$ de plus, comme G est un sous-espace vectoriel de F, alors : $0_F \in G$.

  Ainsi : $f(0_E) \in G$. D'où : $0_E \in f^{-1}(G)$.
- Démontrons que $f^{-1}(G)$ est stable par combinaison linéaire.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(x_1, x_2) \in \big(f^{-1}(G)\big)^2$.
  - $\times$ Comme $x_1 \in f^{-1}(G)$, alors : $f(x_1) \in G$.
  - $\times$ Comme $x_2 \in f^{-1}(G)$, alors : $f(x_2) \in G$.

  On en déduit, puisque f est linéaire :

$$f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) \quad = \quad \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2)$$

  Or, comme $\big(f(x_1), f(x_2)\big) \in G^2$ et G est un espace vectoriel, alors : $\lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) \in G$.
  On a bien démontré : $f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) \in G$.
  On en déduit : $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in f^{-1}(G)$.

$\square$

- **Réciproque d'un isomorphisme**

  Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
  Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
  Supposons que u est un isomorphisme de E dans F.

Alors l'application réciproque u^{-1} est un isomorphisme de F dans E.
(en particulier, $u^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$)

Démonstration.

- L'application $u^{-1} : F \to E$ est bijective en tant que réciproque de l'application $u : E \to F$ qui est elle-même bijective.
- Il reste à démontre que $u^{-1} : F \to E$ est linéaire.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(y_1, y_2) \in F^2$.
  L'application u étant surjective :
  - $\times$ il existe $x_1 \in E$ tel que : $y_1 = u(x_1)$.
    Ce qu'on peut aussi écrire : $x_1 = u^{-1}(y_1)$.
  - $\times$ il existe $x_2 \in E$ tel que : $y_2 = u(x_2)$.
    Ce qu'on peut aussi écrire : $x_2 = u^{-1}(y_2)$.

  On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl}
u^{-1}(\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2) & = & u^{-1}\Big(\lambda_1 \cdot u(x_1) + \lambda_2 \cdot u(x_2)\Big) \\
& = & u^{-1}\Big(u(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2)\Big) \\
& = & \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \\
& = & \lambda_1 \cdot u^{-1}(y_1) + \lambda_2 \cdot u^{-1}(y_2)
\end{array}$$

  Ainsi, $u^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$. $\square$

- **Caractérisation de l'injectivité à l'aide du noyau**

  Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
  Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\text{L'application } f \text{ injective} \ \Leftrightarrow \ \text{Ker}(f) = \{0_E\}$$

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons f injective. Démontrons que : $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

($\supset$) Comme f linéaire, $f(0_E) = 0_F$.
Ce qui démontre que : $\text{Ker}(f) \supset \{0_E\}$.

($\subset$) Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Ainsi :

$$f(x) \ = \ 0_F \ = \ f(0_E)$$

L'application f étant injective, $x = 0_E$.
Ce qui démontre : $x \in \{0_E\}$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$. Démontrons que f est injective.

Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$.

On a alors : $f(x) - f(y) = 0_F$, ce qui s'écrit :

$$f(x - y) = 0_F$$

Ainsi, $x - y \in \text{Ker}(f) = \{0_E\}$, d'où $x - y = 0_E$ et $x = y$.

□

- **Caractérisation de l'image en dimension finie**

  Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
  On suppose E de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ et on note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_p)\right)$$

Démonstration.
Démonstration du point *2)*.

($\subset$) Soit $y \in \text{Im}(f)$.
Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Le vecteur x se décompose de manière unique sur $\mathscr{B}$.
Autrement dit, il existe un unique p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ tel que :

$$x = x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_p \cdot e_p$$

Ainsi, par linéarité de f :

$$y = f(x) = x_1 \cdot f(e_1) + \cdots + x_p \cdot f(e_p)$$

Ainsi, $y \in \text{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_n)\right)$.

($\supset$) Soit $y \in \text{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_p)\right)$. Il existe alors $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$y = \lambda_1 \cdot f(e_1) + \ldots + \lambda_p \cdot f(e_p) = f\Big(\lambda_1 \cdot e_1 + \ldots + \lambda_p \cdot e_p\Big)$$

Ainsi, $y \in \text{Im}(f)$.

□

Connaissances exigibles

Dénombrement

- Ensemble fini : définition, cardinal.
- Propriétés des cardinaux :
  × lien avec l'injectivité, la surjectivité,
  × cardinal d'une union disjointe,
  × cardinale du complémentaire,
  × cardinal d'une union quelconque de 2 ensembles finis,
  × cardinal d'un produit cartésien.
- Ensemble dénombrable
- Notion de p-liste : définition, cardinal de $\mathcal{A}(E, F)$
- Notion de permutation
- Notion de p-combinaison
- Propriétés des coefficients binomiaux

Intégration

- Fonction en escalier : définition, propriétés
- Intégrale de fonctions en escalier : définition, propriétés
- Fonction continue par morceaux :
  - définition,
  - propriétés,
  - approximation des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier.
- Intégrale des fonctions continues par morceaux : construction, propriétés
- Primitives de fonctions continues : définition, propriétés, théorème fondamental
- Étude d'intégrales fonctions de leurs bornes
- Techniques de majoration d'intégrales
- Changement de variable et parité ou périodicité
- Méthodes de calcul approché d'intégrales :
  × somme de Riemann et méthode des rectangles,
  × méthode des trapèzes.
- Formules de Taylor :
  × formule de Taylor avec reste intégral,
  × inégalité de Taylor-Lagrange,
  × formule de Taylor-Young.
- Généralisation à des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Application linéaires

- Applications linéaires :
  × définition,
  × premières propriétés,
  × conservation de la structure d'espace vectoriel,

- Structure de l'ensemble des applications linéaires :
  - × structure d'espace vectoriel,
  - × composition d'applications linéaires : linéarité, puissance $k^{\text{ème}}$ d'un endomorphisme,
- Isomorphismes et automorphismes :
  - × définition,
  - × linéarité de l'application réciproque,
  - × réciproque de la composée d'isomorphismes,
- Noyau d'une application linéaire :
  - × définition,
  - × structure d'espace vectoriel,
  - × caractérisation de l'injectivité,
- Image d'une application linéaire :
  - × définition,
  - × structure d'espace vectoriel,
  - × caractérisation de la surjectivité,
- Cas particulier de la dimension finie :
  - × caractérisation de l'image en dimension finie,
  - × caractérisation de l'injectivité / surjectivité / bijectivité par l'image d'une famille libre / génératrice / base,
  - × rang d'une application linéaire,
  - × théorème du rang,
  - × rang d'une composée,
  - × caractérisation de l'injectivité / surjectivité / bijectivité par le rang,
  - × détermination d'une application linéaire en dimension finie,
- Formes linéaires :
  - × définition,
  - × caractérisation des hyperplans en dimension finie,
  - × équations d'un hyperplan dans une base.

On sanctionnera fortement les points suivants :

- × toute confusion d'objets,
- × toute confusion variable libre / liée (ou muette),
- × tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),
- × toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),
- × tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.