PCSI

Programme de colle - Semaine 22

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Calcul pratique d'un développement limité**
  Par exemple, déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \mathrm{e}^x \tan(x)$.

  Démonstration.
  On calcule :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^x \tan(x) & = & \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\left(x + \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) \\ & = & x + \dfrac{x^3}{3} \\ & & + x^2 \\ & & + \dfrac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\ & = & x + x^2 + \dfrac{5}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \end{array}$$

  □

- **Démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel**
  Par exemple, démontrer que l'ensemble F suivant est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel :

$$F = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P'(0) = 0\}$$

  Démonstration.
  Démontrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
  - $F \subset \mathbb{K}[X]$, par définition de F.
  - $F \neq \varnothing$. En effet, $0_{\mathbb{K}[X]} \in F$ car :

$$(0_{\mathbb{K}[X]})'(0) = (0_{\mathbb{K}[X]})(0) = 0$$

  - Démontrons que F est stable par combinaison linéaire.
    Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(P, Q) \in F^2$.
    Démontrons : $\lambda \cdot P + \mu \cdot Q \in F$.

$$\begin{array}{rcll} (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)'(0) & = & (\lambda \cdot P' + \mu \cdot Q')(0) & \textit{(par linéarité de la dérivation)} \\ & = & \lambda\, P'(0) + \mu\, Q'(0) & \textit{(par linéarité de l'évaluation en } 0\textit{)} \\ & = & \lambda \times 0 + \mu \times 0 & \textit{(car } (P,Q) \in F^2\textit{)} \\ & = & 0 & \end{array}$$

    Ainsi : $\lambda \cdot P + \mu \cdot Q \in F$.

  Finalement, l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, et donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. □

- **Démontrer la liberté d'une famille**
  Par exemple, démontrer que la famille $\mathcal{F}$ suivante est libre :

$$\mathcal{F} \;=\; \big((-1,0,1),\, (1,-1,1),\, (0,1,2)\big)$$

Démonstration.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$.
Supposons :

$$\lambda_1 \cdot (-1,0,1) + \lambda_2 \cdot (1,-1,1) + \lambda_3 \cdot (0,1,2) \;=\; 0_{\mathbb{K}^3} \qquad (*)$$

$$\begin{array}{rcl}
\text{Or :} \quad (*) & \Longleftrightarrow & (-\lambda_1 + \lambda_2,\, -\lambda_2 + \lambda_3,\, \lambda_1 + \lambda_2 + 2\,\lambda_3 = (0,\,0,\,0) \\[6pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\[18pt]
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_2 & = & 0 \\ & & 2\,\lambda_2 & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\[18pt]
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_2 & = & 0 \\ & & & & 4\,\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\[18pt]
& \Longleftrightarrow & \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\
& & \textit{(par remontées successives)}
\end{array}$$

Ainsi : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
La famille $\mathcal{F}$ est donc libre. □

Connaissances exigibles

Convexité

- Définition de fonctions convexes et fonctions concaves, interprétation graphique
- Théorème des 3 pentes
- Lien entre convexité et monotonie de la dérivée
- Lien entre convexité et signe de la dérivée seconde
- Caractérisation de la convexité par la position relative d'une courbe avec ses tangentes
- Point d'inflexion

Développements limités

- Définition de $\mathrm{DL}_n(x_0)$ et unicité
- Équivalence au 1^er terme non nul de son DL
- Conséquence de la parité sur les DL
- Lien entre existence d'un DL et régularité :
  × f continue en x_0 ssi f admet un $\mathrm{DL}_0(x_0)$
  × f dérivable en x_0 ssi f admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$
  × f de classe $\mathcal{C}^n \Rightarrow f$ admet un $\mathrm{DL}_n()$
- Primitivation de DL

- Dérivation de DL
- Formule de Taylor-Young
- DL usuels
- Opérations algébriques sur les DL : combinaison linéaire, produit, inverse, quotient
- DL et propriétés locales :
  - × position relative d'une courbe et de sa tangente
  - × DL et extrema locaux
  - × DL et recherche d'asymptotes
  - × position relative d'une courbe et de son asymptote

Espaces vectoriels

- Loi de composition interne, loi de composition externe
- Espaces vectoriels : définition, espaces vectoriels de référence
- Combinaison linéaire
- Sous-espaces vectoriels : définition, caractérisation, intersection de sev
- Sous-espaces vectoriels engendrés par une partie : définition, propriété d'espace vectoriel, propriétés de manipulation
- Familles génératrices d'un $\mathbb{K}$-ev : définition, sur-familles d'une famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-ev
- Relation de dépendance linéaire : définition et relation de dépendance linéaire triviale
- Familles libres : définition, sous-familles d'une famille libre, vecteurs linéairement indépendants, familles liées, colinéarité de 2 vecteurs, cas des familles de polynômes non nuls échelonnée en degré
- Bases d'un $\mathbb{K}$-ev : définition, existence et unicité de la décomposition sous forme de combinaison linéaire, bases canoniques
- Espaces vectoriels de dimension finie : définition
- Théorème de la base incomplète, théorème de la base extraite
- Dimension d'un $\mathbb{K}$-ev : définition
- Lien entre cardinaux de familles libres, bases et familles génératrices

On sanctionnera fortement les points suivants :

- × toute confusion d'objets,
- × toute confusion variable libre / liée (ou muette),
- × tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),
- × toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),
- × tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.