Programme de colle - Semaine 22

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Théorème de Rolle**

  Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
  Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ continue sur } [a,b] \\ \bullet\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\\ \bullet\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{il existe } c \in \,]a,b[\text{ tel que } f'(c) = 0$$

Démonstration.

- Tout d'abord, on sait qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Ainsi, $f([a, b]) = [m, M]$ où $m = \min\limits_{[a,b]} f = f(c_1)$ et $M = \max\limits_{[a,b]} f = f(c_2)$ avec $c_1 \in [a, b]$ et $c_2 \in [a, b]$.
- Le but est alors de démontrer que l'un de ces deux extrema est atteint sur $]a, b[$. Si c'est le cas, on conclut : $f'(c) = 0$.
- On distingue alors deux cas :

  1) Si $m = M$ alors pour tout $x \in [a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M = m$.
  Donc f est constante sur $[a, b]$.
  Ainsi $f' = 0$ sur $[a, b]$ et tout $c \in \,]a, b[$ est tel que $f'(c) = 0$.

  2) Si $m \neq M$, trois cas se présentent :

  × soit $c_1 = a$: on démontre dans ce cas que $c_2 \in \,]a, b[$.
  Comme $c_1 = a$, on a $m = f(c_1) = f(a)$. Rappelons que $M = f(c_2)$.
  $c_2 \neq a$ (sinon $f(c_2) = f(a)$ et alors $M = f(a) = m$),
  $c_2 \neq b$ (sinon $f(c_2) = f(b)$ et alors $M = f(b) = f(a) = m$).
  Ainsi, $c_2 \in \,]a, b[$. Enfin, comme f est dérivable en $c_2 \in \,]a, b[$ et y atteint son maximum, on a $f'(c_2) = 0$.

  × soit $c_1 \in \,]a, b[$: comme f est dérivable en $c_1 \in \,]a, b[$ et y atteint son minimum, on a $f'(c_1) = 0$.

  × soit $c_1 = b$: on démontre, comme dans le premier cas que $c_2 \in \,]a, b[$.
  Comme $c_1 = b$, on a $m = f(c_1) = f(b)$. Rappelons que $M = f(c_2)$.
  $c_2 \neq a$ (sinon $f(c_2) = f(a)$ et alors $M = f(a) = f(b) = m$),
  $c_2 \neq b$ (sinon $f(c_2) = f(b)$ et alors $M = f(b) = m$).
  Ainsi, $c_2 \in \,]a, b[$. Enfin, comme f est dérivable en $c_2 \in \,]a, b[$ et y atteint son maximum, on a $f'(c_2) = 0$.

$\square$

- **Calcul pratique d'un développement limité**
- **Démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel**
- **Démontrer la liberté d'une famille**

Connaissances exigibles

Dérivabilité

- Taux d'accroissement
- Dérivabilité en un point : définition, interprétation graphique, interprétation physique
- Dérivabilité à gauche et à droite en un point
- Opérations sur les fonctions dérivables en un point (combinaison linéaire, produit, quotient, composée, réciproque)
- Dérivable $\Rightarrow$ continue
- Lien entre dérivabilité et extremum local
- Développement limité d'ordre 1
- Tangente en un point
- Dérivabilité globale : définition, opérations sur les fonctions dérivables (combinaison linéaire, produit, quotient, composée, réciproque)
- Dérivée $n^{\text{ème}}$, classe $\mathcal{C}^n$, classe $\mathcal{C}^\infty$: définitions et opérations (dont la formule de Leibniz)
- Fonctions lipschitziennes
- Grands théorème de la dérivabilité :
  - × théorème de Rolle : énoncé, interprétation graphique, interprétation physique
  - × théorème des accroissements finis : énoncé, interprétation graphique, interprétation physique
  - × inégalité des accroissements finis,
  - × théorème de la limite de la dérivée.
- Caractérisation des fonctions monotones par le signe de la dérivée
- Lien entre extremum local et annulation de la dérivée
- Extension aux fonctions à valeurs complexes :
  - × définitions toujours valides
  - × caractérisation de la dérivabilité à l'aide des parties réelle et imaginaire

Convexité

- Définition de fonctions convexes et fonctions concaves, interprétation graphique
- Théorème des 3 pentes
- Lien entre convexité et monotonie de la dérivée
- Lien entre convexité et signe de la dérivée seconde
- Caractérisation de la convexité par la position relative d'une courbe avec ses tangentes
- Point d'inflexion

Développements limités

- Définition de $\mathrm{DL}_n(x_0)$ et unicité
- Équivalence au 1^{er} terme non nul de son DL
- Conséquence de la parité sur les DL
- Lien entre existence d'un DL et régularité :
  - × f continue en x_0 ssi f admet un $\mathrm{DL}_0(x_0)$
  - × f dérivable en x_0 ssi f admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$
  - × f de classe $\mathcal{C}^n \Rightarrow f$ admet un $\mathrm{DL}_n()$
- Primitivation de DL
- Dérivation de DL
- Formule de Taylor-Young
- DL usuels
- Opérations algébriques sur les DL : combinaison linéaire, produit, inverse, quotient
- DL et propriétés locales :
  - × position relative d'une courbe et de sa tangente
  - × DL et extrema locaux
  - × DL et recherche d'asymptotes
  - × position relative d'une courbe et de son asymptote

Espaces vectoriels

- Loi de composition interne, loi de composition externe
- Espaces vectoriels : définition, espaces vectoriels de référence
- Combinaison linéaire
- Sous-espaces vectoriels : définition, caractérisation, intersection de sev
- Sous-espaces vectoriels engendrés par une partie : définition, propriété d'espace vectoriel, propriétés de manipulation
- Familles génératrices d'un $\mathbb{K}$-ev : définition, sur-familles d'une famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-ev
- Relation de dépendance linéaire : définition et relation de dépendance linéaire triviale
- Familles libres : définition, sous-familles d'une famille libre, vecteurs linéairement indépendants, familles liées, colinéarité de 2 vecteurs, cas des familles de polynômes non nuls échelonnée en degré
- Bases d'un $\mathbb{K}$-ev : définition, existence et unicité de la décomposition sous forme de combinaison linéaire, bases canoniques
- Espaces vectoriels de dimension finie : définition
- Théorème de la base incomplète, théorème de la base extraite
- Dimension d'un $\mathbb{K}$-ev : définition
- Lien entre cardinaux de familles libres, bases et familles génératrices

On sanctionnera fortement les points suivants :

- × toute confusion d'objets,
- × toute confusion variable libre / liée (ou muette),
- × tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),
- × toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),
- × tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.