PCSI

Programme de colle - Semaine 21

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Développement limité d'ordre 1 et dérivabilité**

  Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

$$\begin{array}{c} f \text{ est dérivable} \\ \text{en } x_0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} f \text{ admet un développement limité} \\ \text{d'ordre 1 en } x_0 \end{array}$$

Lorsque ce développement limité existe, ses coefficients sont : $\left\{ \begin{array}{l} a_0 = f(x_0) \\ a_1 = f'(x_0) \end{array} \right.$

Ainsi, si f est dérivable en x_0, il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tel qu'au voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons f dérivable en x_0.

Notons $\varepsilon : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} \tau_{x_0}(f)(x) - f'(x_0) & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$

(c'est le ε donné par la formule finale)

On a alors $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ et de plus, pour tout $x \neq x_0$:

$$\begin{array}{ll} & \varepsilon(x) = \tau_{x_0}(f)(x) - f'(x_0) \\ \text{donc} & \varepsilon(x) + f'(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ \text{et} & f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x) \end{array}$$

Cette formule est aussi valable pour $x = x_0$. Au final, on a bien :
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0) + (x - x_0)\ \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

($\Leftarrow$) Si f possède un développement limité d'ordre 1 alors :

× $a_0 = f(x_0)$ (le développement est vérifié en x_0 !)

× $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1 + \varepsilon(x)$

On en conclut que $\tau_{x_0}(f)$ admet une limite finie quand $x \to x_0$.

□

- **Formule de Leibniz**

  Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

  Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$.

  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f et g sont n fois dérivables sur I.

  Alors $f \times g$ est n fois dérivable sur I et :

$$(f \times g)^{(n)} \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ f^{(n-k)} \times g^{(k)}$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathscr{P}(n)$
où $\quad \mathscr{P}(n) : (f \times g)^{(n)} \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \ g^{(n-k)}$.

▸ **Initialisation** :
$(f \times g)^{(0)} = f \times g$ et $\sum\limits_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)} \ g^{(0-k)} = \binom{0}{0} f^{(0)} \ g^{(0)} = f \times g$.
D'où $\mathscr{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$.
(*i.e.* $(f \times g)^{(n+1)} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \ g^{(n+1-k)}$).

Tout d'abord, remarquons : $(f \times g)^{(n+1)} \ = \ \big((f \times g)^{(n)}\big)'$.
Or, par hypothèse de récurrence, on sait :

$$(f \times g)^{(n)} \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \ g^{(n-k)}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} & (f \times g)^{(n+1)} \\ = \ & \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)} \right)' \\ = \ & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \big(f^{(k)} \times g^{(n-k)} \big)' \\ = \ & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \big(f^{(k+1)} \times g^{(n-k)} + f^{(k)} \times g^{(n-k+1)} \big) \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
& (f \times g)^{(n)} \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} \times g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \\
= \quad & \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} \times g^{(n-(k-1))} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \qquad \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \quad & \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} \times g^{(n-(k-1))} \right) + \binom{n}{n} f^{(n+1)} \times g^{(0)} \\
+ \quad & \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \right) + \binom{n}{0} f^{(0)} \times g^{(n+1)} \\
= \quad & f^{(0)} g^{(n+1)} + \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \right) + f^{(n+1)} g^{(0)} \\
= \quad & f^{(0)} \times g^{(n+1)} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \right) + f^{(n+1)} \times g^{(0)} \qquad \textit{(par triangle de Pascal)} \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

La dernière ligne est obtenue en remarquant que :
$f^{(0)} g^{(n+1)} = \binom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1)}$ et $f^{(n+1)} g^{(0)} = \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)}$.
D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$. □

- **Théorème de Rolle**

  Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

  Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ continue sur } [a, b] \\ \bullet\ f \text{ dérivable sur }]a, b[\\ \bullet\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{il existe } c \in\ ]a, b[\text{ tel que } f'(c) = 0$$

Démonstration.

- Tout d'abord, on sait qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Ainsi, $f([a, b]) = [m, M]$ où $m = \min\limits_{[a,b]} f = f(c_1)$ et $M = \max\limits_{[a,b]} f = f(c_2)$ avec $c_1 \in [a, b]$ et $c_2 \in [a, b]$.
- Le but est alors de démontrer que l'un de ces deux extrema est atteint sur $]a, b[$. Si c'est le cas, on conclut : $f'(c) = 0$.
- On distingue alors deux cas :

  1) Si $m = M$ alors pour tout $x \in [a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M = m$.
  Donc f est constante sur $[a, b]$.
  Ainsi $f' = 0$ sur $[a, b]$ et tout $c \in\ ]a, b[$ est tel que $f'(c) = 0$.

2) Si $m \neq M$, trois cas se présentent :

× soit $c_1 = a$: on démontre dans ce cas que $c_2 \in \,]a, b[$.
Comme $c_1 = a$, on a $m = f(c_1) = f(a)$. Rappelons que $M = f(c_2)$.

$c_2 \neq a$ (sinon $f(c_2) = f(a)$ et alors $M = f(a) = m$),

$c_2 \neq b$ (sinon $f(c_2) = f(b)$ et alors $M = f(b) = f(a) = m$).

Ainsi, $c_2 \in \,]a, b[$. Enfin, comme f est dérivable en $c_2 \in \,]a, b[$ et y atteint son maximum, on a $f'(c_2) = 0$.

× soit $c_1 \in \,]a, b[$: comme f est dérivable en $c_1 \in \,]a, b[$ et y atteint son minimum, on a $f'(c_1) = 0$.

× soit $c_1 = b$: on démontre, comme dans le premier cas que $c_2 \in \,]a, b[$.
Comme $c_1 = b$, on a $m = f(c_1) = f(b)$. Rappelons que $M = f(c_2)$.

$c_2 \neq a$ (sinon $f(c_2) = f(a)$ et alors $M = f(a) = f(b) = m$),

$c_2 \neq b$ (sinon $f(c_2) = f(b)$ et alors $M = f(b) = m$).

Ainsi, $c_2 \in \,]a, b[$. Enfin, comme f est dérivable en $c_2 \in \,]a, b[$ et y atteint son maximum, on a $f'(c_2) = 0$.

□

- **Calcul pratique d'un développement limité**

Connaissances exigibles

Dérivabilité

- Taux d'accroissement
- Dérivabilité en un point : définition, interprétation graphique, interprétation physique
- Dérivabilité à gauche et à droite en un point
- Opérations sur les fonctions dérivables en un point (combinaison linéaire, produit, quotient, composée, réciproque)
- Dérivable ⇒ continue
- Lien entre dérivabilité et extremum local
- Développement limité d'ordre 1
- Tangente en un point
- Dérivabilité globale : définition, opérations sur les fonctions dérivables (combinaison linéaire, produit, quotient, composée, réciproque)
- Dérivée $n^{\text{ème}}$, classe $\mathcal{C}^n$, classe $\mathcal{C}^\infty$: définitions et opérations (dont la formule de Leibniz)
- Fonctions lipschitziennes
- Grands théorème de la dérivabilité :
  × théorème de Rolle : énoncé, interprétation graphique, interprétation physique
  × théorème des accroissements finis : énoncé, interprétation graphique, interprétation physique
  × inégalité des accroissements finis,
  × théorème de la limite de la dérivée.

- Caractérisation des fonctions monotones par le signe de la dérivée
- Lien entre extremum local et annulation de la dérivée
- Extension aux fonctions à valeurs complexes :
  - × définitions toujours valides
  - × caractérisation de la dérivabilité à l'aide des parties réelle et imaginaire

Convexité

- Définition de fonctions convexes et fonctions concaves, interprétation graphique
- Théorème des 3 pentes
- Lien entre convexité et monotonie de la dérivée
- Lien entre convexité et signe de la dérivée seconde
- Caractérisation de la convexité par la position relative d'une courbe avec ses tangentes
- Point d'inflexion

Développements limités

- Définition de $\mathrm{DL}_n(x_0)$ et unicité
- Équivalence au 1^{er} terme non nul de son DL
- Conséquence de la parité sur les DL
- Lien entre existence d'un DL et régularité :
  - × f continue en x_0 ssi f admet un $\mathrm{DL}_0(x_0)$
  - × f dérivable en x_0 ssi f admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$
  - × f de classe $\mathcal{C}^n \Rightarrow f$ admet un $\mathrm{DL}_n()$
- Primitivation de DL
- Dérivation de DL
- Formule de Taylor-Young
- DL usuels
- Opérations algébriques sur les DL : combinaison linéaire, produit, inverse, quotient
- DL et propriétés locales :
  - × position relative d'une courbe et de sa tangente
  - × DL et extrema locaux
  - × DL et recherche d'asymptotes
  - × position relative d'une courbe et de son asymptote

On sanctionnera fortement les points suivants :
- × toute confusion d'objets,
- × toute confusion variable libre / liée (ou muette),
- × tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),
- × toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),
- × tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.