Programme de colle - Semaine 20

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

- si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.
- si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Calcul de la racine carrée d'un nombre complexe**
- **Résolution d'une équation polynomiale de degré 2 à coefficients complexes**
- **Factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$**
- **Développement limité d'ordre 1 et dérivabilité**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

$$\begin{array}{c} f \text{ est dérivable} \\ \text{en } x_0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} f \text{ admet un développement limité} \\ \text{d'ordre 1 en } x_0 \end{array}$$

Lorsque ce développement limité existe, ses coefficients sont : $\left\{ \begin{array}{l} a_0 = f(x_0) \\ a_1 = f'(x_0) \end{array} \right.$

Ainsi, si f est dérivable en x_0, il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tel qu'au voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Démonstration.

$(\Rightarrow)$ Supposons f dérivable en x_0.

Notons $\varepsilon : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} \tau_{x_0}(f)(x) - f'(x_0) & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$

(c'est le ε donné par la formule finale)

On a alors $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ et de plus, pour tout $x \neq x_0$:

$$\begin{array}{ll} & \varepsilon(x) = \tau_{x_0}(f)(x) - f'(x_0) \\ \text{donc} & \varepsilon(x) + f'(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ \text{et} & f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x) \end{array}$$

Cette formule est aussi valable pour $x = x_0$. Au final, on a bien :
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0) + (x - x_0)\ \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

($\Leftarrow$) Si f possède un développement limité d'ordre 1 alors :

- $\times$ $a_0 = f(x_0)$ (le développement est vérifié en x_0 !)
- $\times$ $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1 + \varepsilon(x)$

On en conclut que $\tau_{x_0}(f)$ admet une limite finie quand $x \to x_0$.

$\square$

- **Formule de Leibniz**

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f et g sont n fois dérivables sur I.

Alors $f \times g$ est n fois dérivable sur I et :

$$(f \times g)^{(n)} \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ f^{(n-k)} \times g^{(k)}$$

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathscr{P}(n)$

où $\quad \mathscr{P}(n) : (f \times g)^{(n)} \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \ g^{(n-k)}$.

▸ **Initialisation** :

$(f \times g)^{(0)} = f \times g$ et $\sum\limits_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)} \ g^{(0-k)} = \binom{0}{0} f^{(0)} \ g^{(0)} = f \times g$.

D'où $\mathscr{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$.

(*i.e.* $(f \times g)^{(n+1)} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \ g^{(n+1-k)}$).

Tout d'abord, remarquons : $(f \times g)^{(n+1)} \ = \ \left((f \times g)^{(n)}\right)'$.

Or, par hypothèse de récurrence, on sait :

$$(f \times g)^{(n)} \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \ g^{(n-k)}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} & (f \times g)^{(n+1)} \\ = \ & \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)} \right)' \\ = \ & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} \times g^{(n-k)} \right)' \\ = \ & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} \times g^{(n-k)} + f^{(k)} \times g^{(n-k+1)} \right) \end{aligned}$$

On obtient :

$$
\begin{aligned}
& (f \times g)^{(n)} \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} \times g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \\
= \quad & \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} \times g^{(n-(k-1))} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \quad & \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} \times g^{(n-(k-1))} \right) + \binom{n}{n} f^{(n+1)} \times g^{(0)} \\
+ \quad & \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \right) + \binom{n}{0} f^{(0)} \times g^{(n+1)} \\
= \quad & f^{(0)} g^{(n+1)} + \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \right) + f^{(n+1)} g^{(0)} \\
= \quad & f^{(0)} \times g^{(n+1)} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \right) + f^{(n+1)} \times g^{(0)} && \textit{(par triangle de Pascal)} \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)}
\end{aligned}
$$

La dernière ligne est obtenue en remarquant que :
$f^{(0)} g^{(n+1)} = \binom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1)}$ et $f^{(n+1)} g^{(0)} = \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)}$.
D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$. □

Connaissances exigibles

Polynômes

- Définitions d'un polynôme, ses coefficients, son degré, son coefficient dominant
- Opérations dans $\mathbb{K}[X]$: $+$, $\times$, $\cdot$, $\circ$
- Binôme de Newton
- Propriétés du degré
- Divisibilité : définition et propriétés
- Division euclidienne
- Dérivation formelle d'un polynôme : définition et propriétés
- Dérivées $p^{\text{ème}}$
- Formule de Leibniz
- Formule de Taylor polynomiale
- Racine d'un polynôme : définition, caractérisation avec la divisibilité
- Lien entre degré d'un polynômé et nombre maximal de ses racines
- Multiplicité d'une racine : définition, caractérisation par la divisibilité, caractérisation à l'aide des dérivées
- Polynômes scindés : définition, caractérisation à l'aide du degré
- Relations coefficients / racines

- Polynômes irréductibles : définition, propriétés, description des irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$
- Factorisation en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$
- Factorisation en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$
- Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

Nombres complexes

- Racine carrée d'un nombre complexe : définition et calcul pratique
- Équations polynomiale du 2^{nd} degré : expression des solutions (dans le cas d'équations à coefficients réels ou complexes)
- Racines $n^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe : définition, nombre de racines $n^{\text{ème}}$ et expression de ces racines, représentation dans le plan complexe
- Racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité :
  - × définition, expressions, représentation dans le plan complexe,
  - × nullité de la somme des racines $n^{\text{ème}}$,
  - × ensemble $\mathbb{U}_n$: définition, structure de groupe multiplicatif.
- Exponentielle complexe :
  - × définition, non injectivité, non surjectivité,
  - × propriété de morphisme,
  - × module et argument de e^z,
  - × résolution d'équation du type $e^z = a$.
- Interprétations géométriques :
  - × transformation du plan : translation, homothétie, rotation, symétrie d'axe (Ox)
  - × alignement et orthogonalité

Dérivabilité

- Taux d'accroissement
- Dérivabilité en un point : définition, interprétation graphique, interprétation physique
- Dérivabilité à gauche et à droite en un point
- Opérations sur les fonctions dérivables en un point (combinaison linéaire, produit, quotient, composée, réciproque)
- Dérivable $\Rightarrow$ continue
- Lien entre dérivabilité et extremum local
- Développement limité d'ordre 1
- Tangente en un point
- Dérivabilité globale : définition, opérations sur les fonctions dérivables (combinaison linéaire, produit, quotient, composée, réciproque)
- Dérivée $n^{\text{ème}}$, classe $\mathcal{C}^n$, classe $\mathcal{C}^\infty$: définitions et opérations (dont la formule de Leibniz)
- Fonctions lipschitziennes
- Grands théorème de la dérivabilité :
  - × théorème de Rolle : énoncé, interprétation graphique, interprétation physique
  - × théorème des accroissements finis : énoncé, interprétation graphique, interprétation physique
  - × inégalité des accroissements finis,
  - × théorème de la limite de la dérivée.

⚠

On sanctionnera fortement les points suivants :

- $\times$ toute confusion d'objets,
- $\times$ toute confusion variable libre / liée (ou muette),
- $\times$ tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),
- $\times$ toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),
- $\times$ tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.