PCSI

Programme de colle - Semaine 2

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Stricte croissance d'une fonction sur un intervalle**

  Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

  Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

  Les propositions suivantes sont équivalentes :

  (1) $\forall (x, y) \in D^2, \quad (x < y) \;\Rightarrow\; \big(f(x) < f(y)\big)$

  (2) $\forall (x, y) \in D^2, \quad (x < y) \;\Leftrightarrow\; \big(f(x) < f(y)\big)$

  Démonstration.
  On procède par double implication.

  ($\Leftarrow$) On a bien sûr : ***(2)*** $\Rightarrow$ ***(1)***.

  ($\Rightarrow$) Supposons ***(1)*** et démontrons ***(2)***.
  Soit $(x, y) \in D^2$. On procède de nouveau par double implication.

  ($\Rightarrow$) Vraie d'après ***(1)***.

  ($\Leftarrow$) On procède par contraposée.
  Supposons : $x \geqslant y$. Deux cas se présentent alors :

  × si $x = y$, alors on a toujours : $f(x) = f(y)$ par définition d'une fonction.

  × si $x > y$, alors d'après ***(1)*** : $f(x) > f(y)$.

  Finalement : $f(x) \geqslant f(y)$.
  On a bien démontrer : $\texttt{NON}(x < y) \;\Rightarrow\; \texttt{NON}(f(x) < f(y))$. $\square$

- **Décomposition en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire**

  Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.

  Toute fonction de I dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

  Démonstration.
  Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.
  On procède par analyse-synthèse.

  - <u>**Analyse**</u> : Supposons qu'il existe deux fonctions $g : I \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ telles que :

    1) $f = g + h$,

    2) g est paire,

    3) h est impaire.

    On remarque tout d'abord, pour tout $x \in I$, alors $-x \in I$ (car l'intervalle I est symétrique par rapport à 0) et :

    $$\begin{array}{rcll} f(-x) & = & (g+h)(-x) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{1)}}\textit{)} \\ & = & g(-x) + h(-x) & \\ & = & g(x) - h(x) & \textit{(car } g \textit{ paire et } h \textit{ impaire)} \end{array}$$

    On obtient ainsi le système suivant :

    $$\left\{ \begin{array}{rcrcr} g(x) & + & h(x) & = & f(x) \\ g(x) & - & h(x) & = & f(-x) \end{array} \right. \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} g(x) & + & h(x) & = & f(x) & & \\ & - & 2\,h(x) & = & -f(x) & + & f(-x) \end{array} \right.$$

    $$\overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\,g(x) & & & = & f(x) & + & f(-x) \\ & - & 2\,h(x) & = & -f(x) & + & f(-x) \end{array} \right.$$

    $$\underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2}{\overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{ \begin{array}{rcrcl} g(x) & & & = & \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \\ & & h(x) & = & \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{array} \right.$$

  - <u>**Synthèse**</u> : On pose

    $$\begin{array}{cccc} g_0 & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} h_0 & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{array}$$

    On remarque alors :

    × tout d'abord : $f = g_0 + h_0$. En effet, pour tout $x \in I$:

    $$(g_0 + h_0)(x) \;=\; g_0(x) + h_0(x) \;=\; \frac{f(x) + \cancel{f(-x)}}{2} + \frac{f(x) - \cancel{f(-x)}}{2} \;=\; \frac{\cancel{2}\,f(x)}{\cancel{2}} \;=\; f(x)$$

    × ensuite, g_0 est paire. En effet, pour tout $x \in I$, alors $-x \in I$ et :

    $$g_0(-x) \;=\; \frac{f(-x) + f\big(-(-x)\big)}{2} \;=\; \frac{f(-x) + f(x)}{2} \;=\; g_0(x)$$

    × enfin, h_0 est impaire. En effet, pour tout $x \in I$, alors $-x \in I$ et :

    $$h_0(-x) \;=\; \frac{f(-x) - f\big(-(-x)\big)}{2} \;=\; \frac{f(-x) - f(x)}{2} \;=\; -\frac{f(x) - f(-x)}{2} \;=\; -h_0(x)$$

  $\square$

- **Propriétés d'une bijection**

  Soit $f : E \to F$ une bijection de E sur F.

  Et $f^{-1} : F \to E$ sa réciproque.

1) $\forall x \in E, \forall y \in F,\ (y = f(x) \ \Leftrightarrow\ x = f^{-1}(y))$

2) $\forall y \in F,\ f(f^{-1}(y)) = y$

3) $\forall x \in E,\ f^{-1}(f(x)) = x$

4) $f^{-1} : F \to E$ est une bijection de F sur E.

Démonstration.

1) Soient $x \in E$ et $y \in F$.
On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons $y = f(x)$.
Alors x est un antécédent (il est unique puisque f est bijective) de y par f.
Or, par définition de f^{-1}, f^{-1} associe à chaque élément $y \in F$ son unique antécédent dans E par f : c'est précisément x. Cela démontre que $f^{-1}(y) = x$.

($\Leftarrow$) Supposons $x = f^{-1}(y)$.
Par définition de f^{-1}, $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent dans l'ensemble E de l'élément y par la fonction f. On a donc $y = f(x)$.

2) Soit $y \in F$.
Par définition de f^{-1}, $f^{-1}(y)$ est l'unique x dans E tel que $y = f(x)$. Ainsi, $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$.

3) Soit $x \in E$.
Notons $y = f(x)$. Alors, d'après *1)* : $x = f^{-1}(y)$.
Ainsi, $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$.

4) On souhaite démontrer : $\forall v \in E, \exists! u \in F,\ v = f^{-1}(u)$.
Soit $v \in E$.

× D'après *3)* : $f^{-1}(f(v)) = v$. Ainsi, en notant $u = f(v)$, on a bien trouvé un élément $u \in F$ tel que $f^{-1}(u) = v$.

× Il reste à démontrer l'unicité de u. On procède par l'absurde.
Supposons qu'il existe $t \in F$ tel que :

- d'une part : $t \neq u$,
- d'autre part : $v = f^{-1}(t)$.

Alors, d'après *1)* : $t = f(v)$. Ainsi : $t = f(v) = u$.
Absurde !

□

Connaissances exigibles

Récurrence, somme, produit

- Récurrences simple, double, forte
- Sommes finies :
  - × Notation $\sum$
  - × Sommation d'une constante
  - × Sommation par paquets (ou relation de Chasles discrète)
  - × Sommation sur une union d'ensembles
  - × Linéarité de $\sum$
  - × Décalage d'indice et sommation dans l'autre sens
  - × Sommes télescopiques
  - × Sommes finies usuelles : somme des n premiers entiers, des n premiers carrés d'entiers, des n premiers cubes d'entiers et somme géométrique
  - × Sommes doubles : sommes sur un rectangle, sur un triangle supérieur, sur un triangle supérieur strict. Formules d'interversion des sommes finies.
  - × Produits finis

Généralités sur les fonctions

- Schéma d'étude d'une fonction
- Monotonie :
  - × Définitions de croissance, décroissance, monotonie, stricte croissance, stricte décroissance, stricte monotonie d'une fonction sur un intervalle
  - × Somme de fonctions croissantes, somme de fonctions décroissantes sur un même intervalle
  - × Produit de fonctions croissantes positives sur un même intervalle
  - × Composée de fonctions monotones sur des intervalles adéquats
- Fonctions majorées, minorée, bornées
- Extrema locaux, extrema globaux
- Borne supérieure et borne inférieure d'une fonction
- Réduction de l'ensemble d'étude par parité, par imparité, par périodicité
- Translations et homothéties : $x \mapsto f(x+a)$ et $x \mapsto f(ax)$. Lien entre la courbe représentative de ces fonctions et celle de f.
- Règles de dérivation : somme, produit, composée, réciproque.

  ⚠ Ce point ne fera l'objet d'aucune question nécessitant un retour à la définition de dérivabilité. Cette dernière sera vue dans un chapitre ultérieure.

- Théorème de la bijection.

On sanctionnera fortement les points suivants :

× toute confusion d'objets,

× toute confusion variable libre / liée (ou muette),

× tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),

× toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),

× toute transgression à la rédaction de la récurrence vue en classe,

× tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration citées ci-dessus.