PCSI

Programme de colle - Semaine 18

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Inverse d'une matrice par pivot de Gauss**
- **Décomposition en somme d'une matrice symétrique et antisymétrique**
  Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose de manière unique en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

  Démonstration.
  Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
  On procède par analyse-synthèse.

  - **Analyse** : Supposons qu'il existe $(A, S) \in \big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\big)^2$ telle que :

    1) $M = A + S$,

    2) $A \in \mathscr{A}n$,

    3) $S \in \mathscr{S}n$.

    On remarque tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} M^T & = & (A+S)^T & \\ & = & A^T + S^T & \textit{(par linéarité de la transposée)} \\ & = & -A + S & \textit{(car } A \in \mathscr{A}n \textit{ et } S \in \mathscr{S}n\textit{)} \end{array}$$

    On obtient ainsi le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} A & + & S & = & M \\ -A & + & S & = & M^T \end{array}\right. \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff}} \left\{\begin{array}{rcrcl} A & + & S & = & M \\ & & 2 \cdot S & = & M + M^T \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} 2 \cdot A & = & M - M^T \\ 2 \cdot S & = & M + M^T \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}\,L_1 L_2 \leftarrow \frac{1}{2}\,L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} A & = & \dfrac{1}{2} \cdot (M - M^T) \\ S & = & \dfrac{1}{2} \cdot (M + M^T) \end{array}\right.$$

- **Synthèse** : On pose

$$A_0 \;=\; \frac{1}{2} \cdot (M - M^T) \quad \text{et} \quad S_0 \;=\; \frac{1}{2} \cdot (M + M^T)$$

On remarque alors :

1) tout d'abord :

$$A_0 + S_0 \;=\; \frac{1}{2} \cdot (M - \cancel{M^T}) + \frac{1}{2} \cdot (M + \cancel{M^T}) \;=\; M$$

2) ensuite : $A_0 \in \mathscr{A}n$. En effet :

$$\begin{aligned} A_0^T &= \left(\frac{1}{2} \cdot (M - M^T)\right)^T \\ &= \frac{1}{2} \cdot \big(M^T - (M^T)^T\big) && \textit{(par linéarité de la transposée)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (M^T - M) && \textit{(car la transposée est involutive)} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (M - M^T) \;=\; -A_0 \end{aligned}$$

3) enfin : $S_0 \in \mathscr{S}n$. En effet :

$$\begin{aligned} S_0^T &= \left(\frac{1}{2} \cdot (M + M^T)\right)^T \\ &= \frac{1}{2} \cdot \big(M^T + (M^T)^T\big) && \textit{(par linéarité de la transposée)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (M^T + M) && \textit{(car la transposée est involutive)} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (M + M^T) \;=\; S_0 \end{aligned}$$

□

- **Formule de Taylor polynomiale**

  Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

  Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$P(X) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} \; (X - \alpha)^k$$

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$

où $\quad \mathscr{P}(n) : \forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} \; (X - \alpha)^k.$

▸ **Initialisation** : soit $P \in \mathbb{K}_0[X]$.

- D'une part :

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} \; (X - \alpha)^k \;=\; \frac{P^{(0)}(\alpha)}{0!} \; (X - \alpha)^0 \;=\; P(\alpha)$$

- D'autre part, P est un polynôme constant. Ainsi : $P(X) = P(\alpha)$.

Ainsi : $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{0} \dfrac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\ (X-\alpha)^k$.

D'où $\mathscr{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $\forall P \in \mathbb{K}_{n+1}[X],\ P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \dfrac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\ (X-\alpha)^k$).

Soit $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$.

- On remarque : $P' \in \mathbb{K}_n[X]$. Ainsi, par hypothèse de récurrence :

$$P'(X) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{(P')^{(k)}(\alpha)}{k!}\ (X-\alpha)^k \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{k!}\ (X-\alpha)^k$$

- On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\begin{aligned} P(X) \ &= \ \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{k!}\ \frac{1}{k+1}\ (X-\alpha)^{k+1} + \lambda \\ &= \ \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!}\ (X-\alpha)^{k+1} + \lambda \\ &= \ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\ (X-\alpha)^{k} + \lambda && \textit{(par décalage d'indice)} \\ &= \ (X-\alpha) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\ (X-\alpha)^{k-1} + \lambda \end{aligned}$$

- Enfin, en évaluant l'égalité précédente en α, on obtient :

$$P(\alpha) \ = \ \cancel{(\alpha-\alpha) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\ (\alpha-\alpha)^{k-1}} + \lambda \ = \ \lambda$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P(X) \ &= \ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\ (X-\alpha)^{k} + \lambda \\ &= \ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\ (X-\alpha)^{k} + P(\alpha) \\ &= \ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\ (X-\alpha)^{k} + \frac{P^{(0)}(\alpha)}{0!}\ (X-\alpha)^0 && \textit{(d'après le calcul de l'initialisation)} \\ &= \ \sum_{k=0}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\ (X-\alpha)^{k} \end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$. □

Connaissances exigibles

Systèmes linéaires et matrices

- Système linéaire, homogène, de Cramer, échelonné, triangulaire
- Algorithme du pivot de Gauss
- Matrice rectangle, carrée, ligne, colonne, nulle, identité, élémentaire, scalaire, triangulaire inférieure, triangulaire supérieure, diagonale
- Somme de matrices
- Produit externe d'une matrice par un scalaire
- Produit de matrices (interne dans le cas de matrices carrées de même ordre)
- Puissance $m^{\text{ème}}$ d'une matrice
- Symbole de Kronecker
- Interprétation des opérations élémentaires à l'aide de matrices
- Transposée de matrices
- Matrices symétriques, antisymétriques
- Calcul par blocs
- Matrices inversibles : définition, propriétés, calcul explicite par algorithme du pivot de Gauss

Polynômes

- Définitions d'un polynôme, ses coefficients, son degré, son coefficient dominant
- Opérations dans $\mathbb{K}[X]$: $+$, $\times$, $\cdot$, $\circ$
- Binôme de Newton
- Propriétés du degré
- Divisibilité : définition et propriétés
- Division euclidienne
- Dérivation formelle d'un polynôme : définition et propriétés
- Dérivées $p^{\text{ème}}$
- Formule de Leibniz
- Formule de Taylor polynomiale
- Racine d'un polynôme : définition, caractérisation avec la divisibilité
- Lien entre degré d'un polynômé et nombre maximal de ses racines
- Multiplicité d'une racine : définition, caractérisation par la divisibilité, caractérisation à l'aide des dérivées
- Polynômes scindés : définition, caractérisation à l'aide du degré
- Relations coefficients / racines
- Polynômes irréductibles : définition, propriétés, description des irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$
- Factorisation en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$
- Factorisation en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$
- Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

On sanctionnera fortement les points suivants :

- × toute confusion d'objets,
- × toute confusion variable libre / liée (ou muette),
- × tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),
- × toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),
- × tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.