PCSI

Programme de colle - Semaine 17

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Existence d'un diviseur premier**
  Tout entier supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.
  On demandera à l'étudiant, en plus de la démonstration de la proposition précédente, un calcul de pgcd par décomposition en facteurs premiers.

  Démonstration.
  Démontrons par récurrence (forte) : $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$: n admet au moins un diviseur premier.

  ▸ **Initialisation**
  Le nombre 2 admet 2 comme diviseur premier.
  D'où $\mathscr{P}(2)$.

  ▸ **Hérédité** : soit $n \in [\![2, +\infty[\![$.
  Supposons : $\forall d \in [\![2, n]\!]$, $\mathscr{P}(d)$. Démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $n+1$ admet au moins un diviseur premier).
  Deux cas se présentent :

  × si $n+1$ est premier, alors il admet un diviseur premier : lui-même.

  × si $n+1$ n'est pas premier, alors il admet des diviseurs positifs autres que 1 et $n+1$.
  Notons d l'un de ces diviseurs positifs. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n+1 = k\,d$. De plus :

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & < & d & < & n+1 \\ \text{donc} & 2 & \leqslant & d & \leqslant & n \qquad \textit{(car } d \in \mathbb{N}\textit{)} \end{array}$$

  Par hypothèse de récurrence, d admet un diviseur premier. Notons le δ. Alors il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que : $d = k'\,\delta$. D'où :

$$n+1 \;=\; k\,d \;=\; k\,k'\,\delta$$

  Ainsi : $\delta \mid n+1$. Comme δ est premier, on en déduit que $n+1$ admet bien un diviseur premier.
  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

  □

- **Résolution d'un système linéaire par pivot de Gauss**
  Par exemple, résoudre le système suivant.

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Démonstration.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(S) \quad \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 + L_1}{\iff}} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 2y & = & -2z \\ & & 4y & = & 2z \end{array}\right.$$

$$\overset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}\,L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}\,L_2}}{\iff} \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & -z \\ & & 2y & = & z \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 + L_2}{\iff} \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & & & = & -z \\ & & 2y & = & z \end{array}\right.$$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (S). On obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -\frac{1}{2}\ z \text{ et } y = \frac{1}{2}\ z\} \\ &= \{\left(-\frac{1}{2}\ z, \frac{1}{2}\ z, z\right) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \mid z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$\square$

- **Inverse d'une matrice par pivot de Gauss**
  Par exemple, déterminer, si elle existe, l'inverse de la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Démonstration.
On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\left.\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}\right| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_1 \end{array} \right.$.

$$\left.\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La réduite de Gauss obtenue est triangulaire (supérieure) et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Elle est donc inversible et A aussi.
On effectue ensuite l'opération $\{L_1 \leftarrow L_1 - L_3$.

$$\left.\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On effectue l'opération $\{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$.

$$\left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. □

- **Décomposition en somme d'une matrice symétrique et antisymétrique**
  Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose de manière unique en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Démonstration.
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse** : Supposons qu'il existe $(A, S) \in \big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\big)^2$ telle que :
  1) $M = A + S$,
  2) $A \in \mathscr{A}n$,
  3) $S \in \mathscr{S}n$.

  On remarque tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} M^T & = & (A+S)^T & \\ & = & A^T + S^T & \textit{(par linéarité de la transposée)} \\ & = & -A + S & \textit{(car } A \in \mathscr{A}n \textit{ et } S \in \mathscr{S}n\textit{)} \end{array}$$

On obtient ainsi le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcccl} A & + & S & = & M \\ -A & + & S & = & M^T \end{array}\right. \overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{lcrcl} A & + & S & = & M \\ & & 2 \cdot S & = & M + M^T \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{lrcl} 2 \cdot A & & = & M - M^T \\ & 2 \cdot S & = & M + M^T \end{array}\right.$$

$$\overset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}\,L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}\,L_2}}{\iff} \left\{\begin{array}{lrcl} A & & = & \dfrac{1}{2} \cdot (M - M^T) \\ & S & = & \dfrac{1}{2} \cdot (M + M^T) \end{array}\right.$$

- **Synthèse** : On pose

$$A_0 \ = \ \frac{1}{2} \cdot (M - M^T) \quad \text{et} \quad S_0 \ = \ \frac{1}{2} \cdot (M + M^T)$$

On remarque alors :

1) tout d'abord :

$$A_0 + S_0 \ = \ \frac{1}{2} \cdot (M - \cancel{M^T}) + \frac{1}{2} \cdot (M + \cancel{M^T}) \ = \ M$$

2) ensuite : $A_0 \in \mathscr{A}n$. En effet :

$$\begin{array}{rcll} A_0^T & = & \left(\dfrac{1}{2} \cdot (M - M^T)\right)^T & \\ & = & \dfrac{1}{2} \cdot \left(M^T - (M^T)^T\right) & \textit{(par linéarité de la transposée)} \\ & = & \dfrac{1}{2} \cdot (M^T - M) & \textit{(car la transposée est involutive)} \\ & = & -\dfrac{1}{2} \cdot (M - M^T) \ = \ -A_0 & \end{array}$$

3) enfin : $S_0 \in \mathscr{S}n$. En effet :

$$\begin{array}{rcll} S_0^T & = & \left(\dfrac{1}{2} \cdot (M + M^T)\right)^T & \\ & = & \dfrac{1}{2} \cdot \left(M^T + (M^T)^T\right) & \textit{(par linéarité de la transposée)} \\ & = & \dfrac{1}{2} \cdot (M^T + M) & \textit{(car la transposée est involutive)} \\ & = & \dfrac{1}{2} \cdot (M + M^T) \ = \ S_0 & \end{array}$$

□

Connaissances exigibles

Arithmétique

- Relation de divisibilité dans $\mathbb{Z}$: définition et propriétés
- Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$
- Descente de Fermat : principe et code **Python**
- Congruence : définition et propriétés
- PGCD : définition et propriétés
- Algorithme d'Euclide : principe et code **Python** (impératif et récursif)
- PPCM : définition et propriétés
- Nombres premiers entre eux : définition
- Nombres premiers : définition et propriétés
- Existence d'une infinité de nombres premiers
- Crible d'Ératostène
- Décomposition en produit de facteurs premiers. Application au calcul de PGCD et PPCM

Systèmes linéaires et matrices

- Système linéaire, homogène, de Cramer, échelonné, triangulaire
- Algorithme du pivot de Gauss
- Matrice rectangle, carrée, ligne, colonne, nulle, identité, élémentaire, scalaire, triangulaire inférieure, triangulaire supérieure, diagonale
- Somme de matrices
- Produit externe d'une matrice par un scalaire
- Produit de matrices (interne dans le cas de matrices carrées de même ordre)
- Puissance $m^{\text{ème}}$ d'une matrice
- Symbole de Kronecker
- Interprétation des opérations élémentaires à l'aide de matrices
- Transposée de matrices
- Matrices symétriques, antisymétriques
- Calcul par blocs
- Matrices inversibles : définition, propriétés, calcul explicite par algorithme du pivot de Gauss

⚠

On sanctionnera fortement les points suivants :

× toute confusion d'objets,

× toute confusion variable libre / liée (ou muette),

× tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),

× toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),

× tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.