

Programme de colle - Semaine 17

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

- × si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8 .
- × si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note ≤ 8 .

Questions de cours

- **Résolution d'un système linéaire par pivot de Gauss**
- **Inverse d'une matrice par pivot de Gauss**
- **Décomposition en somme d'une matrice symétrique et antisymétrique**

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose de manière unique en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Démonstration.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse** : Supposons qu'il existe $(A, S) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ telle que :

1) $M = A + S,$

2) $A \in \mathcal{A}n,$

3) $S \in \mathcal{S}n.$

On remarque tout d'abord :

$$\begin{aligned} M^T &= (A + S)^T \\ &= A^T + S^T \quad (\text{par linéarité de la transposée}) \\ &= -A + S \quad (\text{car } A \in \mathcal{A}n \text{ et } S \in \mathcal{S}n) \end{aligned}$$

On obtient ainsi le système suivant :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} A + S = M \\ -A + S = M^T \end{array} \right. &\xleftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left\{ \begin{array}{l} A + S = M \\ 2 \cdot S = M + M^T \end{array} \right. \\ &\xleftrightarrow{L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2} \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot A = M - M^T \\ 2 \cdot S = M + M^T \end{array} \right. \\ &\xleftrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1, L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2} \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{1}{2} \cdot (M - M^T) \\ S = \frac{1}{2} \cdot (M + M^T) \end{array} \right. \end{aligned}$$

- **Synthèse** : On pose

$$A_0 = \frac{1}{2} \cdot (M - M^T) \quad \text{et} \quad S_0 = \frac{1}{2} \cdot (M + M^T)$$

On remarque alors :

1) tout d'abord :

$$A_0 + S_0 = \frac{1}{2} \cdot (M - \cancel{M^T}) + \frac{1}{2} \cdot (M + \cancel{M^T}) = M$$

2) ensuite : $A_0 \in \mathcal{A}n$. En effet :

$$\begin{aligned} A_0^T &= \left(\frac{1}{2} \cdot (M - M^T) \right)^T \\ &= \frac{1}{2} \cdot (M^T - (M^T)^T) && \text{(par linéarité de la transposée)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (M^T - M) && \text{(car la transposée est involutive)} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (M - M^T) = -A_0 \end{aligned}$$

3) enfin : $S_0 \in \mathcal{S}n$. En effet :

$$\begin{aligned} S_0^T &= \left(\frac{1}{2} \cdot (M + M^T) \right)^T \\ &= \frac{1}{2} \cdot (M^T + (M^T)^T) && \text{(par linéarité de la transposée)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (M^T + M) && \text{(car la transposée est involutive)} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (M + M^T) = S_0 \end{aligned}$$

□

• Formule de Taylor polynomiale

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$$

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n) : \forall P \in \mathbb{K}_n[X], P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$.

► **Initialisation** : soit $P \in \mathbb{K}_0[X]$.

- D'une part :

$$\sum_{k=0}^0 \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k = \frac{P^{(0)}(\alpha)}{0!} (X - \alpha)^0 = P(\alpha)$$

- D'autre part, P est un polynôme constant. Ainsi : $P(X) = P(\alpha)$.

$$\text{Ainsi : } P(X) = \sum_{k=0}^0 \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k.$$

D'où $\mathcal{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $\forall P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$, $P(X) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$).

Soit $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$.

- On remarque : $P' \in \mathbb{K}_n[X]$. Ainsi, par hypothèse de récurrence :

$$P'(X) = \sum_{k=0}^n \frac{(P')^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$$

- On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{k!} \frac{1}{k+1} (X - \alpha)^{k+1} + \lambda \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!} (X - \alpha)^{k+1} + \lambda \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k + \lambda \quad (\text{par décalage d'indice}) \\ &= (X - \alpha) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^{k-1} + \lambda \end{aligned}$$

- Enfin, en évaluant l'égalité précédente en α , on obtient :

$$P(\alpha) = (\alpha - \alpha) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (\alpha - \alpha)^{k-1} + \lambda = \lambda$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k + \lambda \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k + P(\alpha) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k + \frac{P^{(0)}(\alpha)}{0!} (X - \alpha)^0 \quad (\text{d'après le calcul de l'initialisation}) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$. □

Connaissances exigibles

Systèmes linéaires et matrices

- Système linéaire, homogène, de Cramer, échelonné, triangulaire
- Algorithme du pivot de Gauss
- Matrice rectangle, carrée, ligne, colonne, nulle, identité, élémentaire, scalaire, triangulaire inférieure, triangulaire supérieure, diagonale
- Somme de matrices
- Produit externe d'une matrice par un scalaire
- Produit de matrices (interne dans le cas de matrices carrées de même ordre)
- Puissance $m^{\text{ème}}$ d'une matrice
- Symbole de Kronecker
- Interprétation des opérations élémentaires à l'aide de matrices
- Transposée de matrices
- Matrices symétriques, antisymétriques
- Calcul par blocs
- Matrices inversibles : définition, propriétés, calcul explicite par algorithme du pivot de Gauss



On sanctionnera fortement les points suivants :

- × toute confusion d'objets,
- × toute confusion variable libre / liée (ou muette),
- × tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),
- × toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),
- × tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.