PCSI

Programme de colle - Semaine 16

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

- × si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.
- × si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **PGCD et algorithme d'Euclide**

  Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{Z}$.

  $$a \wedge b \;=\; a + \lambda\, b \wedge b$$

  On demandera à l'étudiant, en plus de la démonstration de l'égalité précédente, un calcul de pgcd par algorithme d'Euclide.

  Démonstration.
  On procède par double divisibilité.

  - Démontrons : $a \wedge b \mid (a + \lambda\, b) \wedge b$.
    Par définition de $a \wedge b$, on a :

    $$\begin{array}{lcccl} & a \wedge b \mid a & \texttt{ET} & a \wedge b \mid b & \\ \text{donc} & a \wedge b \mid a & \texttt{ET} & a \wedge b \mid \lambda\, b & \textit{(car } \lambda \in \mathbb{Z}\textit{)} \\ \text{d'où} & a \wedge b \mid (a + \lambda\, b) & \texttt{ET} & a \wedge b \mid b & \\ \text{ainsi} & \multicolumn{3}{c}{a \wedge b \mid (a + \lambda\, b) \wedge b} & \textit{(par définition de } (a + \lambda\, b) \wedge b\textit{)} \end{array}$$

  - Démontrons : $(a + \lambda\, b) \wedge b \mid a \wedge b$.
    On note : $d = (a + \lambda\, b) \wedge b$. Par définition de $(a + \lambda\, b) \wedge b$, on a :

    $$\begin{array}{lcccl} & d \mid (a + \lambda\, b) & \texttt{ET} & d \mid b & \\ \text{donc} & d \mid (a + \lambda\, b) & \texttt{ET} & d \mid \lambda\, b & \textit{(car } \lambda \in \mathbb{Z}\textit{)} \\ \text{d'où} & d \mid a & \texttt{ET} & d \mid b & \\ \text{ainsi} & \multicolumn{3}{c}{\mid a \wedge b} & \textit{(par définition de } a \wedge b\textit{)} \end{array}$$

  Finalement : $|a \wedge b| = |(a + \lambda\, b) \wedge b|$. Or un pgcd est positif. Ainsi :

  $$a \wedge b \;=\; (a + \lambda\, b) \wedge b$$

  □

- **Existence d'un diviseur premier**
  Tout entier supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.
  On demandera à l'étudiant, en plus de la démonstration de la proposition précédente, un calcul de pgcd par décomposition en facteurs premiers.

  Démonstration.
  Démontrons par récurrence (forte) : $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$: n admet au moins un diviseur premier.

  - **Initialisation**
    Le nombre 2 admet 2 comme diviseur premier.
    D'où $\mathscr{P}(2)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in [\![2, +\infty[\![$.
    Supposons : $\forall d \in [\![2, n]\!]$, $\mathscr{P}(d)$. Démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $n+1$ admet au moins un diviseur premier).
    Deux cas se présentent :
    - × si $n+1$ est premier, alors il admet un diviseur premier : lui-même.
    - × si $n+1$ n'est pas premier, alors il admet des diviseurs positifs autres que 1 et $n+1$.
      Notons d l'un de ces diviseurs positifs. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n+1 = k\,d$. De plus :

$$\begin{array}{rccccl} & 1 & < & d & < & n+1 \\ \text{donc} & 2 & \leqslant & d & \leqslant & n \qquad \textit{(car } d \in \mathbb{N}\textit{)} \end{array}$$

      Par hypothèse de récurrence, d admet un diviseur premier. Notons le δ. Alors il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que : $d = k'\,\delta$. D'où :

$$n+1 \;=\; k\,d \;=\; k\,k'\,\delta$$

      Ainsi : $\delta \mid n+1$. Comme δ est premier, on en déduit que $n+1$ admet bien un diviseur premier.
      D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

  □

- **Résolution d'un système linéaire par pivot de Gauss**

Connaissances exigibles

Arithmétique

- Relation de divisibilité dans $\mathbb{Z}$: définition et propriétés
- Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$
- Descente de Fermat : principe et code **Python**
- Congruence : définition et propriétés
- PGCD : définition et propriétés
- Algorithme d'Euclide : principe et code **Python** (impératif et récursif)
- PPCM : définition et propriétés
- Nombres premiers entre eux : définition
- Nombres premiers : définition et propriétés
- Existence d'une infinité de nombres premiers
- Crible d'Ératostène
- Décomposition en produit de facteurs premiers. Application au calcul de PGCD et PPCM

Systèmes linéaires et matrices

- Système linéaire, homogène, de Cramer, échelonné, triangulaire
- Algorithme du pivot de Gauss
- Matrice rectangle, carrée, ligne, colonne, nulle, identité, élémentaire, scalaire, triangulaire inférieure, triangulaire supérieure, diagonale
- Somme de matrices
- Produit externe d'une matrice par un scalaire
- Produit de matrices (interne dans le cas de matrices carrées de même ordre)
- Puissance $m^{\text{ème}}$ d'une matrice
- Symbole de Kronecker
- Interprétation des opérations élémentaires à l'aide de matrices

On sanctionnera fortement les points suivants :

× toute confusion d'objets,

× toute confusion variable libre / liée (ou muette),

× tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),

× toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),

× tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.