Programme de colle - Semaine 15

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Théorème d'encadrement**

  Soit $f, g, h : I \to \mathbb{R}$.
  Soit $x_0 \in \overline{I}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$.
  Supposons que :

  × $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de x_0,

  × f admet la limite finie ℓ en x_0 : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$,

  × h admet la limite finie ℓ en x_0 : $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$.

  Alors la fonction g admet une limite finie en x_0. De plus, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$.

  Démonstration.
  Supposons :

  × qu'il existe $\alpha_1 > 0$ tel que : $\forall x \in]x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_1[,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.

  × que : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$. Autrement dit :

  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha_2 > 0,\ \forall x \in I, \Big(|x - x_0| \leqslant \alpha_2 \ \Rightarrow\ \big| f(x) - \ell \big| \leqslant \varepsilon \Big)$$

  × que : $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$. Autrement dit :

  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha_2 > 0,\ \forall x \in I, \Big(|x - x_0| \leqslant \alpha_3 \ \Rightarrow\ \big| h(x) - \ell \big| \leqslant \varepsilon \Big)$$

  Soit $\varepsilon > 0$. Alors :

  × il existe $\alpha_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in I$:

  $$|x - x_0| \leqslant \alpha_2 \ \Rightarrow\ \big| f(x) - \ell \big| \leqslant \varepsilon$$

  × il existe $\alpha_3 > 0$ tel que, pour tout $x \in I$:

  $$|x - x_0| \leqslant \alpha_2 \ \Rightarrow\ \big| h(x) - \ell \big| \leqslant \varepsilon$$

On pose alors : $\alpha_0 = \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.
Soit $x \in I$. Supposons : $|x - x_0| \leqslant \alpha_0$. On obtient :

× tout d'abord, comme $|x - x_0| \leqslant \alpha_0 \leqslant \alpha_1$, alors :

$$f(x) \ \leqslant \ g(x) \ \leqslant \ h(x)$$

× ensuite, comme $|x - x_0| \leqslant \alpha_0 \leqslant \alpha_2$, alors : $\big|f(x) - \ell\big| \leqslant \varepsilon$. D'où :

$$\ell - \varepsilon \ \leqslant \ f(x) \ \leqslant \ \ell + \varepsilon$$

× ensuite, comme $|x - x_0| \leqslant \alpha_0 \leqslant \alpha_3$, alors : $\big|h(x) - \ell\big| \leqslant \varepsilon$. D'où :

$$\ell - \varepsilon \ \leqslant \ h(x) \ \leqslant \ \ell + \varepsilon$$

On en déduit, par transitivité :

$$\ell - \varepsilon \ \leqslant \ f(x) \ \leqslant \ g(x) \leqslant \ h(x) \ \leqslant \ \ell + \varepsilon$$

Ainsi : $\big|g(x) - \ell\big| \leqslant \varepsilon$.
On a donc démontré :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha_0 > 0, \ \forall x \in I, \ \Big(|x - x_0| \leqslant \alpha_0 \ \Rightarrow \ \big|g(x) - \ell\big| \leqslant \varepsilon\Big)$$

Autrement dit : $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$. □

- **Un théorème de la limite monotone**

  Soit f une fonction monotone sur $I =]a, b[$ $(a < b)$.
  (avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)

  Alors f admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en b.

  a) si f est croissante sur I, $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est majorée} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

  b) si f est décroissante sur I, $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \begin{cases} \inf\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est minorée} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

  Démonstration.
  On démontre seulement le cas ***a)***.
  Supposons que f est croissante sur I. Deux cas se présentent.

  - si f est majorée, alors $M = \sup\limits_{I} (f)$ existe. On rappelle qu'on a alors :

    × $\forall x \in I, f(x) \leqslant M$
    × $\forall \varepsilon > 0, \exists u_0 \in I, \ M - \varepsilon < f(x)$

    Démontrons : $\lim\limits_{x \to b} f(x) = M$. Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0, \ \forall x \in I, \ \Big(b - \alpha \leqslant x < b \ \Rightarrow \ \big|f(x) - M\big| \leqslant \varepsilon\Big)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x \in I$.

× Tout d'abord, par propriété du sup : $f(x) \leqslant M$.

× Ensuite, toujours par propriété du sup, il existe $u_0 \in I$ tel que :

$$M - \varepsilon \ < \ f(u_0)$$

Or la fonction f est croissante sur I. Ainsi :

$$\forall x \geqslant u_0, \ f(x) \geqslant f(u_0) > M - \varepsilon$$

Autrement dit :

$$\forall x \in [u_0, b[, \ M - \varepsilon \leqslant f(x)$$

On pose alors : $\alpha = b - u_0$. Notons qu'on a bien : $\alpha > 0$. En effet : $u_0 \in I =]a, b[$.
Soit $x \in I$. Supposons : $b - \alpha \leqslant x < b$. On obtient d'après les deux points précédents :

$$M - \varepsilon \ \leqslant \ f(x) \ \leqslant \ M$$

Par transitivité, on en déduit : $M - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant M \leqslant M + \varepsilon$. D'où :

$$\big|f(x) - M\big| \ \leqslant \ \varepsilon$$

On a bien démontré : $\lim\limits_{x \to b} f(x) = M$.

- si f n'est pas majorée.
  Soit $A \in \mathbb{R}$.
  Comme f non majorée, il existe $u_0 \in I$ tel que : $f(u_0) > A$.
  Comme f est croissante sur I, pour tout $x \in [u_0, b[$:

$$A \ < \ f(u) \ \leqslant \ f(x)$$

En notant $\alpha = b - u > 0$, on a donc :

$$\forall x \in I, (b - \alpha \leqslant x < b \ \Rightarrow \ f(x) > A)$$

Autrement dit : $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$.

□

- **Fonction** arcsin

1) La fonction arcsin est la bijection réciproque de $\sin_{|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$

2) Elle est continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$.

3) Elle est impaire.

4) Elle est dérivable sur $]-1, 1[$ et : $\forall x \in \,]-1, 1[$, $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Démonstration.

1) La fonction $\sin_{|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ est :

× continue sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

× strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Elle réalise donc une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $\sin_{|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\big([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\big)$ où :

$$\sin_{|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\big([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\big) \ = \ \left[\sin_{|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\left(-\frac{\pi}{2}\right), \sin_{|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \ = \ [-1, 1]$$

La fonction arcsin est alors la bijection réciproque de $\sin_{|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$.

2) Par théorème de la bijection, la fonction arcsin est continue et strictement croissante sur $[-1,1]$.

3) Soit $x \in [-1,1]$. Alors $-x \in [-1,1]$. Donc $y = \arcsin(-x)$ est bien défini.

- La fonction sin est impaire. Ainsi :
$$\sin(-y) \;=\; -\sin(y)$$
On en déduit :
$$\sin\big(-\arcsin(-x)\big) \;=\; -\sin\big(\arcsin(-x)\big)$$
- Or :
$$\sin\big(\arcsin(-x)\big) \;=\; -x$$
On en déduit : $\sin\big(-\arcsin(-x)\big) = -(-x) = x$.
- Comme $x \in [-1,1]$, on peut composer cette dernière égalité par arcsin. On obtient :
$$\begin{array}{ccc} \arcsin\Big(\sin\big(-\arcsin(-x)\big)\Big) & = & \arcsin(x) \\ \shortparallel & & \\ -\arcsin(-x) & & \end{array}$$
car $-\arcsin(-x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
D'où : $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$.

4)
- La fonction $\sin_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ est :
  - × bijective de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans l'intervalle $]-1,1[$,
  - × dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,
  - × telle que : $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$.

  Alors sa bijection réciproque arcsin est donc dérivable sur $]-1,1[$
- De plus, pour tout $x \in]-1,1[$:
$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sin'\big(\arcsin(x)\big)} \\ &= \frac{1}{\cos\big(\arcsin(x)\big)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

□

- **Fonction** arctan

1) La fonction arctan est la bijection réciproque de $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$

2) Elle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3) Elle est impaire.

4) Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Démonstration.

1) La fonction $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ est :
× continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,
× strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Elle réalise donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\big(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\big)$ où :
$$\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\Big(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\Big) \;=\; \left]\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}(x), \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}(x)\right] \;=\;]-\infty, +\infty[$$
La fonction arctan est alors la bijection réciproque de $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$.

2) Par théorème de la bijection, la fonction arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $-x \in \mathbb{R}$. Donc $y = \arctan(-x)$ est bien défini.

- La fonction tan est impaire. Ainsi :

$$\tan(-y) \;=\; -\tan(y)$$

  On en déduit :

$$\tan\big(-\arctan(-x)\big) \;=\; -\tan\big(\arctan(-x)\big)$$

- Or :

$$\tan\big(\arctan(-x)\big) \;=\; -x$$

  On en déduit : $\tan\big(-\arctan(-x)\big) = -(-x) = x$.

- On compose cette dernière égalité par arctan. On obtient :

$$\begin{array}{ccc} \arctan\Big(\tan\big(-\arctan(-x)\big)\Big) & = & \arctan(x) \\ \shortparallel & & \\ -\arctan(-x) & & \end{array}$$

  car $-\arctan(-x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
  D'où : $\arctan(-x) = -\arctan(x)$.

4)
- La fonction $\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$ est :
  - × bijective de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans l'intervalle $\mathbb{R}$,
  - × dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,
  - × telle que : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$.

  Alors sa bijection réciproque arctan est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
- De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \arctan'(x) &= \frac{1}{\tan'\big(\arctan(x)\big)} \\ &= \frac{1}{1 + \Big(\tan\big(\arctan(x)\big)\Big)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

□

Connaissances exigibles

Notion de limite

- Voisinages : voisinage d'un point, de $+\infty$ et de $-\infty$
- Définition de limite : en un point, en $+\infty$ et en $-\infty$
- Définition de limite à droite et limite à gauche
- Unicité de la limite
- Opérations sur les limites
- Caractérisation séquentielle de la limite. Application : démontrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point.

- Méthodes pour lever des formes indéterminées :
  - × factorisation par le terme dominant
  - × utilisation de la quantité conjuguée
  - × retour à la définition des fonctions puissances avec les fonctions exp et ln
  - × changement de variable
  - × utilisation des croissances comparées
  - × utilisation des taux d'accroissements
- Compatibilité de la limite avec la relation d'ordre
- Théorème d'encadrement et de comparaison
- Théorème de la limite monotone

Continuité en un point

- Définition d'une fonction continue en un point
- Définition d'une fonction prolongeable par continuité en un point
- Continuité à droite, continuité à gauche
- Définition de la continuité dans le cas d'une fonction à valeurs complexes

Continuité sur un intervalle

- Définition d'une fonction continue dur un intervalle
- Opérations algébriques sur les fonctions continues
- Définition d'une fonction continue par morceaux
- Définition de la continuité dans le cas d'une fonction à valeurs complexes.
- Le conjugué et le module d'une fonction continue sur I sont continues sur I

Grands théorèmes de la continuité

- Théorème des valeurs intermédiaires :
  - × existence d'une solution à l'équation $f(x) = 0$
  - × existence, dans l'intervalle d'extrémités a et b, d'une solution à l'équation $f(x) = c$ si c compris entre $f(a)$ et $f(b)$
  - × l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle
  - × existence, dans I, d'une solution à l'équation $f(x) = c$ si c compris entre $\inf\limits_I (f)$ (ou $-\infty$ si f non minorée) et $\sup\limits_I (f)$ (ou $+\infty$ si f non majorée)
- Théorème des bornes atteintes :
  - × toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes
  - × l'image d'un segment par une fonction continue est un segment
- Théorème de la bijection
- Fonctions trigonométriques réciproques : arcsin, arccos, arctan
- Relations de comparaison : $\underset{x \to x_0}{o}$, $\underset{x \to x_0}{\sim}$, $\underset{x \to x_0}{O}$

On sanctionnera fortement les points suivants :

- × toute confusion d'objets,
- × toute confusion variable libre / liée (ou muette),
- × tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),
- × toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),
- × tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.