# Programme de colle - Semaine 15

## Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note $> 8$.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

## Questions de cours

- **Fonction** arcsin

*1)* La fonction arcsin est la bijection réciproque de $\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$

*2)* Elle est continue et strictement croissante sur $[-1,1]$.

*3)* Elle est impaire.

*4)* Elle est dérivable sur $]-1,1[$ et : $\forall x \in\, ]-1,1[,\ \arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

*Démonstration.*

*1)* La fonction $\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ est :

× continue sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,

× strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

Elle réalise donc une bijection de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ sur $\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\big([-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\big)$ où :

$$\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\big([-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\big) \;=\; \Big[\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\Big(-\frac{\pi}{2}\Big), \sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big] \;=\; [-1,1]$$

La fonction arcsin est alors la bijection réciproque de $\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$.

*2)* Par théorème de la bijection, la fonction arcsin est continue et strictement croissante sur $[-1,1]$.

*3)* Soit $x \in [-1,1]$. Alors $-x \in [-1,1]$. Donc $y = \arcsin(-x)$ est bien défini.

- La fonction sin est impaire. Ainsi :

$$\sin(-y) \;=\; -\sin(y)$$

On en déduit :

$$\sin\big(-\arcsin(-x)\big) \;=\; -\sin\big(\arcsin(-x)\big)$$

- Or :

$$\sin\big(\arcsin(-x)\big) \;=\; -x$$

On en déduit : $\sin\big(-\arcsin(-x)\big) = -(-x) = x$.

- Comme $x \in [-1,1]$, on peut composer cette dernière égalité par arcsin. On obtient :

$$\underbrace{\arcsin\Big(\sin\big(-\arcsin(-x)\big)\Big)}_{=\,-\arcsin(-x)} \;=\; \arcsin(x)$$

car $-\arcsin(-x) \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

D'où : $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$.

*4)* • La fonction $\sin_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ est :

  × bijective de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ dans l'intervalle $]-1,1[$,

  × dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$,

  × telle que : $\forall x \in\, ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\ \sin'(x) = \cos(x) \neq 0$.

  Alors sa bijection réciproque arcsin est donc dérivable sur $]-1,1[$

• De plus, pour tout $x \in\, ]-1,1[$ :

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sin'\big(\arcsin(x)\big)} \\ &= \frac{1}{\cos\big(\arcsin(x)\big)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

□

- **PGCD et algorithme d'Euclide**

  Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{Z}$.

$$a \wedge b \;=\; a + \lambda\, b \wedge b$$

*On demandera à l'étudiant, en plus de la démonstration de l'égalité précédente, un calcul de pgcd par algorithme d'Euclide.*

*Démonstration.*
On procède par double divisibilité.

- Démontrons : $a \wedge b \mid (a+\lambda\, b) \wedge b$.
  Par définition de $a \wedge b$, on a :

$$\begin{array}{lcccl} & a \wedge b \mid a & \texttt{ET} & a \wedge b \mid b & \\ \text{donc} & a \wedge b \mid a & \texttt{ET} & a \wedge b \mid \lambda\, b & \textit{(car } \lambda \in \mathbb{Z}\textit{)} \\ \text{d'où} & a \wedge b \mid (a+\lambda\, b) & \texttt{ET} & a \wedge b \mid b & \\ \text{ainsi} & \multicolumn{3}{c}{a \wedge b \mid (a+\lambda\, b) \wedge b} & \textit{(par définition de } (a+\lambda\, b)\wedge b\textit{)} \end{array}$$

- Démontrons : $(a+\lambda\, b) \wedge b \mid a \wedge b$.
  On note : $d = (a+\lambda\, b) \wedge b$. Par définition de $(a+\lambda\, b) \wedge b$, on a :

$$\begin{array}{lcccl} & d \mid (a+\lambda\, b) & \texttt{ET} & d \mid b & \\ \text{donc} & d \mid (a+\lambda\, b) & \texttt{ET} & d \mid \lambda\, b & \textit{(car } \lambda \in \mathbb{Z}\textit{)} \\ \text{d'où} & d \mid a & \texttt{ET} & d \mid b & \\ \text{ainsi} & \multicolumn{3}{c}{\mid a \wedge b} & \textit{(par définition de } a \wedge b\textit{)} \end{array}$$

Finalement : $|a \wedge b| = |(a+\lambda\, b) \wedge b|$. Or un pgcd est positif. Ainsi :

$$a \wedge b \;=\; (a+\lambda\, b) \wedge b$$

□

- **Existence d'un diviseur premier**
  Tout entier supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.
  *On demandera à l'étudiant, en plus de la démonstration de la proposition précédente, un calcul de pgcd par décomposition en facteurs premiers.*

  *Démonstration.*
  Démontrons par récurrence (forte) : $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$ : $n$ admet au moins un diviseur premier.

  ▸ **Initialisation**
  Le nombre 2 admet 2 comme diviseur premier.
  D'où $\mathscr{P}(2)$.

  ▸ **Hérédité** : soit $n \in [\![2, +\infty[\![$.
  Supposons : $\forall d \in [\![2, n]\!]$, $\mathscr{P}(d)$. Démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $n+1$ admet au moins un diviseur premier).
  Deux cas se présentent :

  × si $n+1$ est premier, alors il admet un diviseur premier : lui-même.

  × si $n+1$ n'est pas premier, alors il admet des diviseurs positifs autres que 1 et $n+1$.
  Notons $d$ l'un de ces diviseurs positifs. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n+1 = k\,d$. De plus :

  $$\begin{array}{rcccccl} & 1 & < & d & < & n+1 & \\ \text{donc} & 2 & \leqslant & d & \leqslant & n & \quad \textit{(car } d \in \mathbb{N}\textit{)} \end{array}$$

  Par hypothèse de récurrence, $d$ admet un diviseur premier. Notons le $\delta$. Alors il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que : $d = k'\,\delta$. D'où :

  $$n+1 = k\,d = k\,k'\,\delta$$

  Ainsi : $\delta \mid n+1$. Comme $\delta$ est premier, on en déduit que $n+1$ admet bien un diviseur premier.
  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

  □

## Connaissances exigibles

### Grands théorèmes de la continuité

- Théorème des valeurs intermédiaires :
  - × existence d'une solution à l'équation $f(x) = 0$
  - × existence, dans l'intervalle d'extrémités $a$ et $b$, d'une solution à l'équation $f(x) = c$ si $c$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$
  - × l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle
  - × existence, dans $I$, d'une solution à l'équation $f(x) = c$ si $c$ compris entre $\inf\limits_I (f)$ (ou $-\infty$ si $f$ non minorée) et $\sup\limits_I (f)$ (ou $+\infty$ si $f$ non majorée)
- Théorème des bornes atteintes :
  - × toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes
  - × l'image d'un segment par une fonction continue est un segment
- Théorème de la bijection
- Fonctions trigonométriques réciproques : arcsin, arccos, arctan
- Relations de comparaison : $\underset{x \to x_0}{o}$, $\underset{x \to x_0}{\sim}$, $\underset{x \to x_0}{O}$

### Arithmétique

- Relation de divisibilité dans $\mathbb{Z}$ : définition et propriétés
- Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$
- Descente de Fermat : principe et code **Python**
- Congruence : définition et propriétés
- PGCD : définition et propriétés
- Algorithme d'Euclide : principe et code **Python** (impératif et récursif)
- PPCM : définition et propriétés
- Nombres premiers entre eux : définition
- Nombres premiers : définition et propriétés
- Existence d'une infinité de nombres premiers
- Crible d'Ératostène
- Décomposition en produit de facteurs premiers. Application au calcul de PGCD et PPCM

On sanctionnera fortement les points suivants :

× toute confusion d'objets,

× toute confusion variable libre / liée (ou muette),

× tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),

× toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),

× tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.