

## Programme de colle - Semaine 14

---

### Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

- × si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note  $> 8$ .
- × si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note  $\leq 8$ .

### Questions de cours

#### • Théorème d'encadrement

Soit  $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Soit  $x_0 \in \bar{I}$  et soit  $\ell \in \mathbb{R}$ .

Supposons que :

- ×  $f \leq g \leq h$  au voisinage de  $x_0$ ,
- ×  $f$  admet la limite finie  $\ell$  en  $x_0$  :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ ,
- ×  $h$  admet la limite finie  $\ell$  en  $x_0$  :  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell$ .

Alors la fonction  $g$  admet une limite finie en  $x_0$ . De plus,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ .

*Démonstration.*

Supposons :

- × qu'il existe  $\alpha_1 > 0$  tel que :  $\forall x \in ]x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_1[, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ .
- × que :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ . Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_2 > 0, \forall x \in I, (|x - x_0| \leq \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

- × que :  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell$ . Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_3 > 0, \forall x \in I, (|x - x_0| \leq \alpha_3 \Rightarrow |h(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors :

- × il existe  $\alpha_2 > 0$  tel que, pour tout  $x \in I$  :

$$|x - x_0| \leq \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

- × il existe  $\alpha_3 > 0$  tel que, pour tout  $x \in I$  :

$$|x - x_0| \leq \alpha_3 \Rightarrow |h(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On pose alors :  $\alpha_0 = \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ .

Soit  $x \in I$ . Supposons :  $|x - x_0| \leq \alpha_0$ . On obtient :

× tout d'abord, comme  $|x - x_0| \leq \alpha_0 \leq \alpha_1$ , alors :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

× ensuite, comme  $|x - x_0| \leq \alpha_0 \leq \alpha_2$ , alors :  $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ . D'où :

$$\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$$

× ensuite, comme  $|x - x_0| \leq \alpha_0 \leq \alpha_3$ , alors :  $|h(x) - \ell| \leq \varepsilon$ . D'où :

$$\ell - \varepsilon \leq h(x) \leq \ell + \varepsilon$$

On en déduit, par transitivité :

$$\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq \ell + \varepsilon$$

Ainsi :  $|g(x) - \ell| \leq \varepsilon$ .

On a donc démontré :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_0 > 0, \forall x \in I, (|x - x_0| \leq \alpha_0 \Rightarrow |g(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

Autrement dit :  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ .

□

### • Un théorème de la limite monotone

Soit  $f$  une fonction monotone sur  $I = ]a, b[$  ( $a < b$ ).

(avec  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  et  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ )

Alors  $f$  admet une limite dans  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  en  $b$ .

**a)** si  $f$  est croissante sur  $I$ ,  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \begin{cases} \sup_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est majorée} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

**b)** si  $f$  est décroissante sur  $I$ ,  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \begin{cases} \inf_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est minorée} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

*Démonstration.*

On démontre seulement le cas **a**).

Supposons que  $f$  est croissante sur  $I$ . Deux cas se présentent.

• si  $f$  est majorée, alors  $M = \sup_I (f)$  existe. On rappelle qu'on a alors :

×  $\forall x \in I, f(x) \leq M$

×  $\forall \varepsilon > 0, \exists u_0 \in I, M - \varepsilon < f(x)$

Démontrons :  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = M$ . Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (b - \alpha \leq x < b \Rightarrow |f(x) - M| \leq \varepsilon)$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $x \in I$ .

× Tout d'abord, par propriété du sup :  $f(x) \leq M$ .

× Ensuite, toujours par propriété du sup, il existe  $u_0 \in I$  tel que :

$$M - \varepsilon < f(u_0)$$

Or la fonction  $f$  est croissante sur  $I$ . Ainsi :

$$\forall x \geq u_0, f(x) \geq f(u_0) > M - \varepsilon$$

Autrement dit :

$$\forall x \in [u_0, b[, M - \varepsilon \leq f(x)$$

On pose alors :  $\alpha = b - u_0$ . Notons qu'on a bien :  $\alpha > 0$ . En effet :  $u_0 \in I = ]a, b[$ .

Soit  $x \in I$ . Supposons :  $b - \alpha \leq x < b$ . On obtient d'après les deux points précédents :

$$M - \varepsilon \leq f(x) \leq M$$

Par transitivité, on en déduit :  $M - \varepsilon \leq f(x) \leq M \leq M + \varepsilon$ . D'où :

$$|f(x) - M| \leq \varepsilon$$

On a bien démontré :  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = M$ .

- si  $f$  n'est pas majorée.

Soit  $A \in \mathbb{R}$ .

Comme  $f$  non majorée, il existe  $u_0 \in I$  tel que :  $f(u_0) > A$ .

Comme  $f$  est croissante sur  $I$ , pour tout  $x \in [u_0, b[$  :

$$A < f(u) \leq f(x)$$

En notant  $\alpha = b - u > 0$ , on a donc :

$$\forall x \in I, (b - \alpha \leq x < b \Rightarrow f(x) > A)$$

Autrement dit :  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$ .

□

## • Fonction arcsin

1) La fonction arcsin est la bijection réciproque de  $\sin$  sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

2) Elle est continue et strictement croissante sur  $[-1, 1]$ .

3) Elle est impaire.

4) Elle est dérivable sur  $] - 1, 1[$  et :  $\forall x \in ] - 1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

*Démonstration.*

1) La fonction  $\sin$  sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  est :

× continue sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,

× strictement croissante sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

Elle réalise donc une bijection de  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  sur  $\sin$  sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  ( $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ) où :

$$\sin$$
 sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  ( $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ) =  $\left[ \sin$  sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  ( $-\frac{\pi}{2}$ ),  $\sin$  sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  ( $\frac{\pi}{2}$ )  $\right]$  =  $[-1, 1]$

La fonction arcsin est alors la bijection réciproque de  $\sin$  sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

2) Par théorème de la bijection, la fonction arcsin est continue et strictement croissante sur  $[-1, 1]$ .

3) Soit  $x \in [-1, 1]$ . Alors  $-x \in [-1, 1]$ . Donc  $y = \arcsin(-x)$  est bien défini.

- La fonction sin est impaire. Ainsi :

$$\sin(-y) = -\sin(y)$$

On en déduit :

$$\sin(-\arcsin(-x)) = -\sin(\arcsin(-x))$$

- Or :

$$\sin(\arcsin(-x)) = -x$$

On en déduit :  $\sin(-\arcsin(-x)) = -(-x) = x$ .

- Comme  $x \in [-1, 1]$ , on peut composer cette dernière égalité par arcsin. On obtient :

$$\begin{aligned} \arcsin(\sin(-\arcsin(-x))) &= \arcsin(x) \\ \parallel \\ -\arcsin(-x) \end{aligned}$$

car  $-\arcsin(-x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

D'où :  $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$ .

4) • La fonction sin  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  est :

× bijective de l'intervalle  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  dans l'intervalle  $] -1, 1[$ ,

× dérivable sur  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,

× telle que :  $\forall x \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$ .

Alors sa bijection réciproque arcsin est donc dérivable sur  $] -1, 1[$

- De plus, pour tout  $x \in ] -1, 1[$  :

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

□

## Connaissances exigibles

### Notion de limite

- Voisinages : voisinage d'un point, de  $+\infty$  et de  $-\infty$
- Définition de limite : en un point, en  $+\infty$  et en  $-\infty$
- Définition de limite à droite et limite à gauche
- Unicité de la limite
- Opérations sur les limites
- Caractérisation séquentielle de la limite. Application : démontrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point.
- Méthodes pour lever des formes indéterminées :
  - × factorisation par le terme dominant
  - × utilisation de la quantité conjuguée
  - × retour à la définition des fonctions puissances avec les fonctions exp et ln
  - × changement de variable
  - × utilisation des croissances comparées
  - × utilisation des taux d'accroissements
- Compatibilité de la limite avec la relation d'ordre
- Théorème d'encadrement et de comparaison
- Théorème de la limite monotone

### Continuité en un point

- Définition d'une fonction continue en un point
- Définition d'une fonction prolongeable par continuité en un point
- Continuité à droite, continuité à gauche
- Définition de la continuité dans le cas d'une fonction à valeurs complexes

### Continuité sur un intervalle

- Définition d'une fonction continue sur un intervalle
- Opérations algébriques sur les fonctions continues
- Définition d'une fonction continue par morceaux
- Définition de la continuité dans le cas d'une fonction à valeurs complexes.
- Le conjugué et le module d'une fonction continue sur  $I$  sont continues sur  $I$

### Grands théorèmes de la continuité

- Théorème des valeurs intermédiaires :
  - × existence d'une solution à l'équation  $f(x) = 0$
  - × existence, dans l'intervalle d'extrémités  $a$  et  $b$ , d'une solution à l'équation  $f(x) = c$  si  $c$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$
  - × l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle
  - × existence, dans  $I$ , d'une solution à l'équation  $f(x) = c$  si  $c$  compris entre  $\inf_I(f)$  (ou  $-\infty$  si  $f$  non minorée) et  $\sup_I(f)$  (ou  $+\infty$  si  $f$  non majorée)

- Théorème des bornes atteintes :
  - × toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes
  - × l'image d'un segment par une fonction continue est un segment
- Théorème de la bijection
- Fonctions trigonométriques réciproques : arcsin, arccos, arctan
- Relations de comparaison :  $o_{x \rightarrow x_0}$ ,  $\sim_{x \rightarrow x_0}$ ,  $O_{x \rightarrow x_0}$



On sanctionnera fortement les points suivants :

- × toute confusion d'objets,
- × toute confusion variable libre / liée (ou muette),
- × tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),
- × toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),
- × tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.