Programme de colle - Semaine 13

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

- × si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.
- × si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Théorème de Césaro**
  Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note (c_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$$

On nomme cette suite *moyenne de Césaro* de la suite (u_n).

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \qquad \Rightarrow \qquad c_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$.

- Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} |c_n - \ell| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k - \ell \right| \\ &= \left| \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} u_k - n\,\ell \right) \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} \ell \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n} (u_k - \ell) \right| \\ &\leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |u_k - \ell| \qquad \textit{(par inégalité triangulaire)} \end{aligned}$$

- De plus, comme la suite (u_n) converge vers ℓ, alors il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall k \geqslant n_1, \ |u_k - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

  Soit $n \geqslant n_1$.
  En sommant ces inégalité pour k variant de n_1 à n, on obtient :

$$\sum_{k=n_1}^{n} |u_k - \ell| \ < \ \sum_{k=n_1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} \ = \ (n - n_1 + 1) \ \frac{\varepsilon}{2}$$

D'où, comme $\dfrac{1}{n} > 0$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n_1}^{n} |u_k - \ell| \; < \; \frac{n - n_1 + 1}{n} \times \frac{\varepsilon}{2}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
|c_n - \ell| \; & \leqslant \; \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |u_k - \ell| \\
& \leqslant \; \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell| + \sum_{k=n_1}^{n} |u_k - \ell| \right) \\
& \leqslant \; \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell| + \frac{1}{n} \sum_{k=n_1}^{n} |u_k - \ell| \\
& \leqslant \; \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell| + \frac{n - n_1 + 1}{n} \times \frac{\varepsilon}{2} \\
& \leqslant \; \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell| + \frac{\varepsilon}{2} && \textit{(car, comme } n \geqslant n_1, \\
& && \textit{alors : } \frac{n - n_1 + 1}{n} \leqslant 1\textit{)}
\end{aligned}$$

- Enfin, comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell|$ ne dépend pas de n, alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit qu'il existe $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_2, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell| \; < \; \frac{\varepsilon}{2}$$

On pose alors : $n_0 = \max(n_1, n_2)$. On obtient, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$|c_n - \ell| \; \leqslant \; \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell| + \frac{\varepsilon}{2} \; \leqslant \; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \; = \; \varepsilon$$

Ce qui démontre : $c_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

$\square$

- **Théorème d'encadrement**
  Soit $f, g, h : I \to \mathbb{R}$.
  Soit $x_0 \in \overline{I}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$.
  Supposons que :
  × $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de x_0,
  × f admet la limite finie ℓ en x_0 : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$,
  × h admet la limite finie ℓ en x_0 : $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$.

  Alors la fonction g admet une limite finie en x_0. De plus, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$.

Démonstration.
Supposons :
× qu'il existe $\alpha_1 > 0$ tel que : $\forall x \in \,]x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_1[$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.
× que : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$. Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha_2 > 0, \ \forall x \in I, \left(|x - x_0| \leqslant \alpha_2 \ \Rightarrow \ \big|f(x) - \ell\big| \leqslant \varepsilon \right)$$

× que : $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$. Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha_2 > 0, \ \forall x \in I, \left(|x - x_0| \leqslant \alpha_3 \ \Rightarrow \ \big|h(x) - \ell\big| \leqslant \varepsilon \right)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors :
× il existe $\alpha_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in I$:

$$|x - x_0| \leqslant \alpha_2 \ \Rightarrow \ \big|f(x) - \ell\big| \leqslant \varepsilon$$

× il existe $\alpha_3 > 0$ tel que, pour tout $x \in I$:

$$|x - x_0| \leqslant \alpha_2 \ \Rightarrow \ \big|h(x) - \ell\big| \leqslant \varepsilon$$

On pose alors : $\alpha_0 = \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.
Soit $x \in I$. Supposons : $|x - x_0| \leqslant \alpha_0$. On obtient :
× tout d'abord, comme $|x - x_0| \leqslant \alpha_0 \leqslant \alpha_1$, alors :

$$f(x) \ \leqslant \ g(x) \ \leqslant \ h(x)$$

× ensuite, comme $|x - x_0| \leqslant \alpha_0 \leqslant \alpha_2$, alors : $\big|f(x) - \ell\big| \leqslant \varepsilon$. D'où :

$$\ell - \varepsilon \ \leqslant \ f(x) \ \leqslant \ \ell + \varepsilon$$

× ensuite, comme $|x - x_0| \leqslant \alpha_0 \leqslant \alpha_3$, alors : $\big|h(x) - \ell\big| \leqslant \varepsilon$. D'où :

$$\ell - \varepsilon \ \leqslant \ h(x) \ \leqslant \ \ell + \varepsilon$$

On en déduit, par transitivité :

$$\ell - \varepsilon \ \leqslant \ f(x) \ \leqslant \ g(x) \leqslant \ h(x) \ \leqslant \ \ell + \varepsilon$$

Ainsi : $\big|g(x) - \ell\big| \leqslant \varepsilon$.
On a donc démontré :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha_0 > 0, \ \forall x \in I, \ \left(|x - x_0| \leqslant \alpha_0 \ \Rightarrow \ \big|g(x) - \ell\big| \leqslant \varepsilon \right)$$

Autrement dit : $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$. □

- **Un théorème de la limite monotone**

  Soit f une fonction monotone sur $I =]a, b[$ $(a < b)$.
  (avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)

  Alors f admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en b.

  a) si f est croissante sur I, $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est majorée} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

  b) si f est décroissante sur I, $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \begin{cases} \inf\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est minorée} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

  Démonstration.
  On démontre seulement le cas ***a)***.
  Supposons que f est croissante sur I. Deux cas se présentent.

- si f est majorée, alors $M = \sup\limits_{I}(f)$ existe. On rappelle qu'on a alors :
  × $\forall x \in I, f(x) \leqslant M$
  × $\forall \varepsilon > 0$, $\exists u_0 \in I$, $M - \varepsilon < f(x)$

  Démontrons : $\lim\limits_{x \to b} f(x) = M$. Autrement dit :

  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ \Big(b - \alpha \leqslant x < b \ \Rightarrow\ \big|f(x) - M\big| \leqslant \varepsilon\Big)$$

  Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x \in I$.
  × Tout d'abord, par propriété du sup : $f(x) \leqslant M$.
  × Ensuite, toujours par propriété du sup, il existe $u_0 \in I$ tel que :

  $$M - \varepsilon \ < \ f(u_0)$$

  Or la fonction f est croissante sur I. Ainsi :

  $$\forall x \geqslant u_0,\ f(x) \geqslant f(u_0) > M - \varepsilon$$

  Autrement dit :

  $$\forall x \in [u_0, b[,\ M - \varepsilon \leqslant f(x)$$

  On pose alors : $\alpha = b - u_0$. Notons qu'on a bien : $\alpha > 0$. En effet : $u_0 \in I =]a, b[$.
  Soit $x \in I$. Supposons : $b - \alpha \leqslant x < b$. On obtient d'après les deux points précédents :

  $$M - \varepsilon \ \leqslant \ f(x) \ \leqslant \ M$$

  Par transitivité, on en déduit : $M - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant M \leqslant M + \varepsilon$. D'où :

  $$\big|f(x) - M\big| \ \leqslant \ \varepsilon$$

  On a bien démontré : $\lim\limits_{x \to b} f(x) = M$.

- si f n'est pas majorée.
  Soit $A \in \mathbb{R}$.
  Comme f non majorée, il existe $u_0 \in I$ tel que : $f(u_0) > A$.
  Comme f est croissante sur I, pour tout $x \in [u_0, b[$:

  $$A \ < \ f(u) \ \leqslant \ f(x)$$

  En notant $\alpha = b - u > 0$, on a donc :

  $$\forall x \in I, (b - \alpha \leqslant x < b \ \Rightarrow\ f(x) > A)$$

  Autrement dit : $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$.

$\square$

Connaissances exigibles

Notion de limite

- Voisinages : voisinage d'un point, de $+\infty$ et de $-\infty$
- Définition de limite : en un point, en $+\infty$ et en $-\infty$
- Définition de limite à droite et limite à gauche
- Unicité de la limite
- Opérations sur les limites
- Caractérisation séquentielle de la limite. Application : démontrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point.
- Méthodes pour lever des formes indéterminées :
  - × factorisation par le terme dominant
  - × utilisation de la quantité conjuguée
  - × retour à la définition des fonctions puissances avec les fonctions exp et ln
  - × changement de variable
  - × utilisation des croissances comparées
  - × utilisation des taux d'accroissements
- Compatibilité de la limite avec la relation d'ordre
- Théorème d'encadrement et de comparaison
- Théorème de la limite monotone

Continuité en un point

- Définition d'une fonction continue en un point
- Définition d'une fonction prolongeable par continuité en un point
- Continuité à droite, continuité à gauche
- Définition de la continuité dans le cas d'une fonction à valeurs complexes

Continuité sur un intervalle

- Définition d'une fonction continue dur un intervalle
- Opérations algébriques sur les fonctions continues
- Définition d'une fonction continue par morceaux
- Définition de la continuité dans le cas d'une fonction à valeurs complexes.
- Le conjugué et le module d'une fonction continue sur I sont continues sur I

Grands théorèmes de la continuité

- Théorème des valeurs intermédiaires :
  - × existence d'une solution à l'équation $f(x) = 0$
  - × existence, dans l'intervalle d'extrémités a et b, d'une solution à l'équation $f(x) = c$ si c compris entre $f(a)$ et $f(b)$
  - × l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle
  - × existence, dans I, d'une solution à l'équation $f(x) = c$ si c compris entre $\inf_I (f)$ (ou $-\infty$ si f non minorée) et $\sup_I (f)$ (ou $+\infty$ si f non majorée)

- Théorème des bornes atteintes :
  - × toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes
  - × l'image d'un segment par une fonction continue est un segment
- Théorème de la bijection

On sanctionnera fortement les points suivants :

× toute confusion d'objets,

× toute confusion variable libre / liée (ou muette),

× tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),

× toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),

× tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.