PCSI

Programme de colle - Semaine 12

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Convergence et caractère borné**
  Toute suite convergente est bornée.

  Démonstration.
  Notons ℓ la limite de la suite (u_n).
  - Choisissons une précision $\varepsilon = 1$.
    Alors, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$: $|u_n - \ell| < 1$.
    Par inégalité triangulaire :
    $$\big||u_n| - |\ell|\big| \ \leqslant \ |u_n - \ell| \ \leqslant \ 1$$
    Ainsi : $-1 \ \leqslant \ |u_n| - |\ell| \ \leqslant \ 1$. En particulier :
    $$|u_n| \ \leqslant \ |\ell| + 1$$
    La suite (u_n) est donc bornée à partir d'un certain rang (n_0 en l'occurrence).
  - Il reste à montrer qu'elle est bornée tout court. Pour ce faire, on doit considérer les éléments de la suite précédant le rang n_0 : u_0, u_1, ..., u_{n_0-1}.
    Ces éléments sont en nombre fini et leurs modules possèdent donc un maximum $A = \max\{\, |u_n| \mid n \in [\![0, n_0 - 1]\!]\}$. Ainsi :
    $$\forall n \in [\![0, n_0 - 1]\!], \ |u_n| \leqslant A$$
  - Si on note $M = \max(A, |\ell| + 1)$, on a alors :
    $$\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| \ \leqslant \ M$$

  □

- **Propriété de recouvrement**
  Soit (u_n) une suite numérique.
  Soit $\ell \in \mathbb{K}$.
  $$\left.\begin{array}{l} u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \\ u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

  Démonstration.
  Supposons :
  a) d'une part : $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Alors il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_1$, $|u_{2n} - \ell| < \varepsilon$.
  b) d'autre part : $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Alors il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_2$, $|u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$.
  On pose alors : $n_0 = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$.

Soit $n \geqslant n_0$. Deux cas se présentent.

- si n est pair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 2k$.
  Or : $n \geqslant n_0 \geqslant 2n_1$. Donc : $k \geqslant n_1$. On obtient, d'après ***a)*** :

$$\underbrace{|u_{2k} - \ell|}_{= |u_n - \ell|} < \varepsilon$$

- si n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 2k+1$.
  Or : $n \geqslant n_0 \geqslant 2n_2 + 1$. Donc : $k \geqslant n_2$. On obtient, d'après ***b)*** :

$$\underbrace{|u_{2k+1} - \ell|}_{= |u_n - \ell|} < \varepsilon$$

Finalement : $\forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$. □

- **Théorème de Césaro**
  Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note (c_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$$

On nomme cette suite *moyenne de Césaro* de la suite (u_n).

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \qquad \Rightarrow \qquad c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$.

- Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} |c_n - \ell| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k - \ell \right| \\ &= \left| \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} u_k - n\,\ell \right) \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} \ell \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n} (u_k - \ell) \right| \\ &\leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |u_k - \ell| \qquad \textit{(par inégalité triangulaire)} \end{aligned}$$

- De plus, comme la suite (u_n) converge vers ℓ, alors il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall k \geqslant n_1,\ |u_k - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

  Soit $n \geqslant n_1$.
  En sommant ces inégalité pour k variant de n_1 à n, on obtient :

$$\sum_{k=n_1}^{n} |u_k - \ell| < \sum_{k=n_1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} = (n - n_1 + 1)\, \frac{\varepsilon}{2}$$

D'où, comme $\dfrac{1}{n} > 0$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n_1}^{n} |u_k - \ell| \ < \ \frac{n - n_1 + 1}{n} \times \frac{\varepsilon}{2}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
|c_n - \ell| &\leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |u_k - \ell| \\
&\leqslant \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell| + \sum_{k=n_1}^{n} |u_k - \ell| \right) \\
&\leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell| + \frac{1}{n} \sum_{k=n_1}^{n} |u_k - \ell| \\
&\leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell| + \frac{n - n_1 + 1}{n} \times \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell| + \frac{\varepsilon}{2} && \textit{(car, comme } n \geqslant n_1, \\
& && \textit{alors : } \frac{n - n_1 + 1}{n} \leqslant 1\textit{)}
\end{aligned}$$

- Enfin, comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell|$ ne dépend pas de n, alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit qu'il existe $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_2, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell| \ < \ \frac{\varepsilon}{2}$$

On pose alors : $n_0 = \max(n_1, n_2)$. On obtient, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$|c_n - \ell| \ \leqslant \ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell| + \frac{\varepsilon}{2} \ \leqslant \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \ = \ \varepsilon$$

Ce qui démontre : $c_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

□

Connaissances exigibles

L'ensemble $\mathbb{R}$

- Propriétés de $+$ et $\times$
- Notion d'ordre total dans $\mathbb{R}$: définitions de $\leqslant$, $\geqslant$, $<$ et $>$, règles de calculs sur ces opérateurs.
- Majorant, minorant d'une partie de $\mathbb{R}$
- Maximum, minimum d'une partie de $\mathbb{R}$: définitions et unicité en cas d'existence
- Borne supérieure, borne inférieure : définitions, caractérisations, lien avec le maximum / minimum
- Intervalles : définition, convexité
- Ensemble $\mathbb{N}$: axiomatique de Peano et premières propriétés
- Ensemble $\mathbb{Z}$: définition et premières propriétés
- Ensemble $\mathbb{Q}$: définition, densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, approximation explicite d'un réel par une suite de rationnels.

Suites numériques

- Montonie, stationnarité d'une suite
- Majorant, minorant d'une suite
- Borne supérieure, borne inférieure d'une suite
- Maximum, minimum d'une suite
- Suite extraite
- Suites usuelles : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2
- Suites convergentes :
  - × définition
  - × caractérisation avec la convergence de la partie réelle et imaginaire pour les suites complexes
  - × unicité de la limite
  - × toute suite convergente est bornée
  - × toute suite extraite d'une suite convergente est convergente
  - × propriété de recouvrement
  - × opérations sur les suites convergentes
  - × théorème de composition de limites
  - × compatibilité avec la relation d'ordre
  - × théorème d'encadrement
- Suites divergentes :
  - × définition
  - × suites divergeant vers $\pm\infty$
  - × toute suite divergeant vers $+\infty$ est positive à partir d'un certain rang (et l'équivalent en $-\infty$)
  - × opérations et formes indéterminées
  - × compatibilité avec la relation d'ordre
  - × compatibilité avec la valeur absolue
  - × théorème de composition de limites
- Théorèmes de convergence monotone
- Suites adjacentes : définition, théorème des suites adjacentes
- Étude de suites récurrentes
- Étude de suites implicites
- Équivalence, négligeabilité

On sanctionnera fortement les points suivants :

- × toute confusion d'objets,
- × toute confusion variable libre / liée (ou muette),
- × tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),
- × toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),
- × tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.