PCSI

Programme de colle - Semaine 11

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Suite arithmético-géométrique**
  On demandera à l'étudiant de déterminer explicitement le terme général d'une suite arithmético-géométrique.
  Par exemple, déterminer explicitement le terme général de la suite (u_n) définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3\,u_n + 2 \end{array} \right.$$

Démonstration.

- L'équation de point fixe associée à la suite (u_n) est : $x = 3 \times x + 2$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x = 3 \times x + 2 \;\Leftrightarrow\; 2 \times x = -2$$

  Cette équation a donc pour unique solution : $c = -1$.

- On note (v_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$v_n \;=\; u_n - c \;=\; u_n + 1$$

  Démontrons que la suite (v_n) est géométrique.
  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} u_{n+1} & = & 3\,u_n & + & 2 \\ c & = & 3\,c & + & 2 \end{array} \right.$$

  En effectuant l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, on obtient :

$$\underset{\underset{\displaystyle v_{n+1}}{\parallel}}{u_{n+1} - c} \;=\; (3\,u_n + \cancel{2}) - (3\,c + \cancel{2}) \;=\; \underset{\underset{\displaystyle 3\,v_n}{\parallel}}{3\,(u_n - c)}$$

  La suite (v_n) est donc géométrique de raison 3.

- On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n \;=\; 3^n \times v_0 \;=\; 3^n\,(u_0 - c) \;=\; 3^n\,(0 - (-1)) \;=\; 3^n$$

- On en conclut, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \;=\; v_n + c \;=\; 3^n - 1$$

□

- **Suite récurrente linéaire d'ordre** 2
On demandera à l'étudiant de déterminer explicitement le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
Par exemple, déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

Démonstration.

- L'équation caractéristique associée à la suite (u_n) est : $x^2 = x + 1$.
On note Δ le discriminant du polynôme Q défini par : $Q(X) = X^2 - X - 1$.

$$\Delta \ = \ (-1)^2 - 4\,(-1) \ = \ 1 + 4 \ = \ 5 > 0$$

Ce polynôme admet donc deux racines réelles disctinctes :

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

- On en déduit qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \ = \ \lambda_1 \times {r_1}^n + \lambda_2 \times {r_2}^n$$

- Déterminons les valeurs de λ_1 et λ_2.

$$\begin{cases} 0 \ = \ \lambda_1 + \lambda_2 & \textit{(valeur en } n = 0\textit{)} \\ 1 \ = \ \lambda_1 \times r_1 + \lambda_2 \times r_2 & \textit{(valeur en } n = 1\textit{)} \end{cases}$$

Résolvons ce système.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ r_1\,\lambda_1 + r_2\,\lambda_2 = 1 \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - r_1\,L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ (r_2 - r_1)\,\lambda_2 = 1 \end{cases}$$

$$\overset{L_1 \leftarrow (r_2 - r_1)L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} (r_2 - r_1)\,\lambda_1 = -1 \\ (r_2 - r_1)\,\lambda_2 = 1 \end{cases}$$

De plus : $r_2 - r_1 \ = \ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \ = \ \sqrt{5}$.
On en déduit que : $\lambda_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $\lambda_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

- Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n \ = \ -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

□

- **Propriétés de $\| \cdot \|_\infty$**

  On note E l'ensemble des fonctions bornées.

  Pour tout $f \in E$, on note : $A_f = \{ \, \left|f(x)\right| \mid x \in [0,1]\}$.

Pour tout $f \in E$, on note : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|f(x)\right| = \sup(A_f)$. Alors $\| \cdot \|_\infty$ est une norme sur E.

Autrement dit, l'application $\| \cdot \|_\infty$ vérifie les propriétés suivantes :

1) **Séparation** :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = 0 \;\Leftrightarrow\; f = 0_{\mathbb{R}^{[0,1]}}$$

2) **Homogénéité** :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \; \forall f \in E, \quad \|\lambda \cdot f\|_\infty \;=\; |\lambda| \times \|f\|_\infty$$

3) **Inégalité triangulaire** :

$$\forall (f,g) \in E^2, \quad \|f+g\|_\infty \;\leqslant\; \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

On démontrera uniquement le point ***2.***

Démonstration.
Tout d'abord, remarquons que, pour tout $f \in E$, la quantité $\|f\|_\infty$ est bien définie.
En effet, comme f est bornée, alors $|f|$ est majorée. Ainsi l'ensemble $A_f = \{ \, \left|f(x)\right| \mid x \in [0,1]\}$ est non vide et majoré. On en déduit que $\sup(A_f)$ existe.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $f \in E$.
On commence par remarquer que $\lambda \cdot f \in E$. Ainsi $\|\lambda \cdot f\|_\infty$ est bien définie.
Deux cas se présentent.

- Si $\lambda = 0$, alors :
  - $\times$ d'une part : $\|0 \cdot f\|_\infty = \|0_{\mathbb{R}^{[0,1]}}\| = 0$ (d'après ***1.***)
  - $\times$ d'autre part : $|0| \times \|f\|_\infty = 0$.

  L'égalité souhaitée est donc vraie pour $\lambda = 0$.

- Si $\lambda \neq 0$. Soit $x \in [0,1]$. On remarque tout d'abord :

$$\left|\lambda \times f(x)\right| \;=\; |\lambda| \times \left|f(x)\right| \qquad (*)$$

On procède ensuite par double inégalité.

($\leqslant$) Le réel $\|f\|_\infty$ est un majorant de A_f. Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\left|f(x)\right| \;\leqslant\; \|f\|_\infty$$

Comme $|\lambda| \geqslant 0$, on en déduit :

$$\underbrace{|\lambda| \times \left|f(x)\right|}_{= \left|\lambda \times f(x)\right|} \;\leqslant\; |\lambda| \times \|f\|_\infty$$

D'où :

$$\forall x \in [0,1], \quad \left|(\lambda \cdot f)(x)\right| \;\leqslant\; |\lambda| \times \|f\|_\infty$$

Ainsi, $|\lambda| \; \|f\|_\infty$ est un majorant de $A_{\lambda \cdot f}$.
Or $\|\lambda \cdot f\|_\infty$ est le plus petit des majorants de $A_{\lambda \cdot f}$. On en conclut :

$$\|\lambda \cdot f\|_\infty \;\leqslant\; |\lambda| \, \|f\|_\infty$$

($\geqslant$) Le réel $\|\lambda \cdot f\|_\infty$ est un majorant de $A_{\lambda \cdot f}$. Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\begin{array}{ccccc} & & \big|(\lambda \cdot f)(x)\big| & \leqslant & \|\lambda \cdot f\|_\infty \\ & & \shortparallel & & \\ |\lambda| \times \big|f(x)\big| & = & \big|\lambda \times f(x)\big| & & \end{array}$$

Comme $|\lambda| > 0$, on en déduit :

$$\forall x \in [0,1], \quad \big|f(x)\big| \;\leqslant\; \frac{1}{|\lambda|}\, \|\lambda \cdot f\|_\infty$$

Ainsi, $\dfrac{1}{|\lambda|}\, \|\lambda \cdot f\|_\infty$ est un majorant de A_f.
Or $\|f\|_\infty$ est le plus petit des majorants de A_f. On en conclut :

$$\|f\|_\infty \;\leqslant\; \frac{1}{|\lambda|}\, \|\lambda \cdot f\|_\infty$$

Comme $|\lambda| > 0$, on obtient : $|\lambda| \times \|f\|_\infty \leqslant \|\lambda \cdot f\|_\infty$.

$\square$

- **Convergence et caractère borné**
  Toute suite convergente est bornée.

  Démonstration.
  Notons ℓ la limite de la suite (u_n).

  - Choisissons une précision $\varepsilon = 1$.
    Alors, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$: $|u_n - \ell| < 1$.
    Par inégalité triangulaire :
    $$\big||u_n| - |\ell|\big| \;\leqslant\; |u_n - \ell| \;\leqslant\; 1$$
    Ainsi : $-1 \;\leqslant\; |u_n| - |\ell| \;\leqslant\; 1$. En particulier :
    $$|u_n| \;\leqslant\; |\ell| + 1$$
    La suite (u_n) est donc bornée à partir d'un certain rang (n_0 en l'occurrence).
  - Il reste à montrer qu'elle est bornée tout court. Pour ce faire, on doit considérer les éléments de la suite précédant le rang n_0 : u_0, u_1, $\dots$, u_{n_0-1}.
    Ces éléments sont en nombre fini et leurs modules possèdent donc un maximum $A = \max\{\, |u_n| \mid n \in [\![0, n_0 - 1]\!]\}$. Ainsi :
    $$\forall n \in [\![0, n_0 - 1]\!],\ |u_n| \leqslant A$$
  - Si on note $M = \max(A, |\ell| + 1)$, on a alors :
    $$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \;\leqslant\; M$$

$\square$

- **Propriété de recouvrement**

  Soit (u_n) une suite numérique.

  Soit $\ell \in \mathbb{K}$.

$$\left.\begin{array}{l} u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \\ u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Démonstration.
Supposons :

a) d'une part : $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Alors il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_1$, $|u_{2n} - \ell| < \varepsilon$.

b) d'autre part : $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Alors il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_2$, $|u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$.

On pose alors : $n_0 = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$.
Soit $n \geqslant n_0$. Deux cas se présentent.

- si n est pair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 2k$.
  Or : $n \geqslant n_0 \geqslant 2n_1$. Donc : $k \geqslant n_1$. On obtient, d'après ***a)*** :

$$\begin{array}{ccc} |u_{2k} - \ell| & < & \varepsilon \\ \shortparallel & & \\ |u_n - \ell| & & \end{array}$$

- si n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 2k + 1$.
  Or : $n \geqslant n_0 \geqslant 2n_2 + 1$. Donc : $k \geqslant n_2$. On obtient, d'après ***b)*** :

$$\begin{array}{ccc} |u_{2k+1} - \ell| & < & \varepsilon \\ \shortparallel & & \\ |u_n - \ell| & & \end{array}$$

Finalement : $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$. □

Connaissances exigibles

L'ensemble $\mathbb{R}$

- Propriétés de $+$ et $\times$
- Notion d'ordre total dans $\mathbb{R}$: définitions de $\leqslant$, $\geqslant$, $<$ et $>$, règles de calculs sur ces opérateurs.
- Majorant, minorant d'une partie de $\mathbb{R}$
- Maximum, minimum d'une partie de $\mathbb{R}$: définitions et unicité en cas d'existence
- Borne supérieure, borne inférieure : définitions, caractérisations, lien avec le maximum / minimum
- Intervalles : définition, convexité
- Ensemble $\mathbb{N}$: axiomatique de Peano et premières propriétés
- Ensemble $\mathbb{Z}$: définition et premières propriétés
- Ensemble $\mathbb{Q}$: définition, densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, approximation explicite d'un réel par une suite de rationnels.

Suites numériques

- Montonie, stationnarité d'une suite
- Majorant, minorant d'une suite
- Borne supérieure, borne inférieure d'une suite
- Maximum, minimum d'une suite
- Suite extraite
- Suites usuelles : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2
- Suites convergentes :
  - définition
  - caractérisation avec la convergence de la partie réelle et imaginaire pour les suites complexes
  - unicité de la limite
  - toute suite convergente est bornée
  - toute suite extraite d'une suite convergente est convergente
  - propriété de recouvrement
  - opérations sur les suites convergentes
  - théorème de composition de limites
  - compatibilité avec la relation d'ordre
  - théorème d'encadrement
- Suites divergentes :
  - définition
  - suites divergeant vers $\pm\infty$
  - toute suite divergeant vers $+\infty$ est positive à partir d'un certain rang (et l'équivalent en $-\infty$)
  - opérations et formes indéterminées
  - compatibilité avec la relation d'ordre
  - compatibilité avec la valeur absolue
  - théorème de composition de limites
- Théorèmes de convergence monotone
- Suites adjacentes : définition, théorème des suites adjacentes
- Étude de suites récurrentes
- Étude de suites implicites

On sanctionnera fortement les points suivants :

- toute confusion d'objets,
- toute confusion variable libre / liée (ou muette),
- tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),
- toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),
- tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.