Programme de colle - Semaine 10

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Équation différentielle linéaire d'ordre** 1
  On demandera à l'étudiant de résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 non homogène.
  Par exemple, résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$t\,y'(t) + y(t) = t\,\mathrm{e}^{t^2} \qquad (E)$$

Démonstration.

- On commence par résoudre l'équation homogène associée à (E), notée (H) :

$$t\,y' + y = 0$$

Tout d'abord, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$t\,y'(t) + y(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'(t) + \frac{1}{t}\,y(t) = 0$$

On remarque que :

× l'équation $y'(t) + \dfrac{1}{t}\,y(t) = 0$ est linéaire homogène d'ordre 1,

× une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est $t \mapsto \ln(t)$

L'ensemble des solutions de l'équation (H) est donc :

$$\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\ln(t)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \;=\; \{t \mapsto \frac{\lambda}{t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E).
  On applique la méthode de variation de la constante.
  Soit λ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On note alors $h : t \mapsto \dfrac{\lambda(t)}{t}$.
  La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
h \text{ est solution de } (E) \quad & \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ t\,h'(t) + h(t) = t\,\mathrm{e}^{t^2} \\
& \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ t\left(\frac{\lambda'(t)}{t} - \frac{\lambda(t)}{t^2}\right) + \frac{\lambda(t)}{t} = t\,\mathrm{e}^{t^2} \\
& \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda'(t) - \cancel{\frac{\lambda(t)}{t}} + \cancel{\frac{\lambda(t)}{t}} = t\,\mathrm{e}^{t^2} \\
& \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda'(t) = t\,\mathrm{e}^{t^2}
\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction λ cherchée peut être choisie parmi les primitives de $t \mapsto t\,\mathrm{e}^{t^2}$.
La fonction $\lambda : t \mapsto \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{t^2}$ convient.
Ainsi, la fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{2t}\,\mathrm{e}^{t^2}$ est une solution particulière de (E).

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{t \mapsto \frac{\lambda}{t} + \frac{1}{2t}\,\mathrm{e}^{t^2} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$\square$

- **Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants**
On demandera à l'étudiant de résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants non homogène. Par exemple, résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y'' - 4\,y' + 3\,y = (2t+1)\,\mathrm{e}^t$$

Démonstration.

- On commence par résoudre l'équation homogène (H) associée à (E) :

$$y'' - 4\,y' + 3\,y = 0$$

  × L'équation (H) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants.
  × Son équation caractéristique est :

$$r^2 - 4r + 3 = 0$$

  Les solutions de cette équation sont 1 et 3.

  L'ensemble des solutions de (H) est donc :

$$\{t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^t + \lambda_2\,\mathrm{e}^{3t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E).
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On note $h : t \mapsto (at^2+bt)\,\mathrm{e}^t$.
La fonction h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Soit $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} h'(t) & = & (2at+b)\,\mathrm{e}^t + (at^2+bt)\,\mathrm{e}^t \\ & = & \big(at^2+(2a+b)t+b\big)\,\mathrm{e}^t \\ h''(t) & = & \big(2at+2a+b\big)\,\mathrm{e}^t + \big(at^2+(2a+b)t+b\big)\,\mathrm{e}^t \\ & = & \big(at^2+(4a+b)t+2a+2b\big)\,\mathrm{e}^t \end{array}$$

On obtient :

$$\begin{array}{rl}
 & h \text{ solution de } (E) \\
\Longleftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R},\quad h''(t) - 4\,h'(t) + 3\,h(t) = (2t+1)\,\mathrm{e}^t \\
\Longleftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R},\quad \big(at^2 + (4a+b)t + 2a + 2b\big)\,\mathrm{e}^t \\
 & \qquad\qquad -4\,\big(at^2 + (2a+b)t + b\big)\,\mathrm{e}^t \\
 & \qquad\qquad +3\,(at^2 + bt)\,\mathrm{e}^t = (2t+1)\,\mathrm{e}^t \\
\Longleftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R},\quad \big(-4at + 2a - 2b\big)\,\mathrm{e}^t = (2t+1)\,\mathrm{e}^t \\
\Longleftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R},\quad -4at + 2a - 2b = 2t + 1 \qquad \textit{(car : } \forall t \in \mathbb{R},\ e^t \neq 0\textit{)} \\
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcr} -4a & & & = & 2 \\ 2a & - & 2b & = & 1 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcr} 2a & & & = & 1 \\ 2a & - & 2b & = & 1 \end{array}\right. \\
\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcr} 2a & & & = & -1 \\ & - & 2b & = & 2 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcr} a & & & = & -\dfrac{1}{2} \\ & & b & = & -1 \end{array}\right.
\end{array}$$

Ainsi la fonction $h : t \mapsto \left(-\dfrac{1}{2}\,t^2 - t\right)\mathrm{e}^t$ est une solution particulière de (E).

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^t + \lambda_2\,\mathrm{e}^{3t} - \left(\frac{1}{2}\,t^2 + t\right)\mathrm{e}^t \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

□

- **Suite arithmético-géométrique**

  On demandera à l'étudiant de déterminer explicitement le terme général d'une suite arithmético-géométrique.

  Par exemple, déterminer explicitement le terme général de la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3\,u_n + 2 \end{array}\right.$$

Démonstration.

- L'équation de point fixe associée à la suite (u_n) est : $x = 3 \times x + 2$.

  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x = 3 \times x + 2 \ \Leftrightarrow\ 2 \times x = -2$$

  Cette équation a donc pour unique solution : $c = -1$.

- On note (v_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$v_n \ = \ u_n - c \ = \ u_n + 1$$

  Démontrons que la suite (v_n) est géométrique.

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} u_{n+1} & = & 3\,u_n & + & 2 \\ c & = & 3\,c & + & 2 \end{array}\right.$$

En effectuant l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, on obtient :

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ \displaystyle v_{n+1}}}{u_{n+1} - c} \;=\; (3\,u_n + \cancel{2}) - (3\,c + \cancel{2}) \;=\; \underset{\substack{\shortparallel \\ \displaystyle 3\,v_n}}{3\,(u_n - c)}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 3.

- On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n \;=\; 3^n \times v_0 \;=\; 3^n\ (u_0 - c) \;=\; 3^n\ (0 - (-1)) \;=\; 3^n$$

- On en conclut, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \;=\; v_n + c \;=\; 3^n - 1$$

□

- **Suite récurrente linéaire d'ordre** 2
On demandera à l'étudiant de déterminer explicitement le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
Par exemple, déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

Démonstration.

- L'équation caractéristique associée à la suite (u_n) est : $x^2 = x + 1$.
On note Δ le discriminant du polynôme Q défini par : $Q(X) = X^2 - X - 1$.

$$\Delta \;=\; (-1)^2 - 4\,(-1) \;=\; 1 + 4 \;=\; 5 > 0$$

Ce polynôme admet donc deux racines réelles disctinctes :

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

- On en déduit qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \;=\; \lambda_1 \times {r_1}^n + \lambda_2 \times {r_2}^n$$

- Déterminons les valeurs de λ_1 et λ_2.

$$\begin{cases} 0 \;=\; \lambda_1 \;+\; \lambda_2 & \textit{(valeur en } n = 0\textit{)} \\ 1 \;=\; \lambda_1 \times r_1 \;+\; \lambda_2 \times r_2 & \textit{(valeur en } n = 1\textit{)} \end{cases}$$

Résolvons ce système.

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 \\ r_1\,\lambda_1 & + & r_2\,\lambda_2 & = & 1 \end{array}\right. \quad \underset{L_2 \leftarrow L_2 - r_1\,L_1}{\iff} \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 \\ & & (r_2 - r_1)\,\lambda_2 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow (r_2 - r_1)L_1 - L_2}{\iff} \quad \left\{\begin{array}{rrcl} (r_2 - r_1)\,\lambda_1 & & = & -1 \\ & (r_2 - r_1)\,\lambda_2 & = & 1 \end{array}\right.$$

De plus : $r_2 - r_1 \;=\; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \;=\; \sqrt{5}$.

On en déduit que : $\lambda_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $\lambda_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

- Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n \;=\; -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

□

- **Propriétés de $\|\cdot\|_\infty$**

On note E l'ensemble des fonctions bornées.

Pour tout $f \in E$, on note : $A_f = \{\,\big|f(x)\big| \mid x \in [0,1]\}$.

Pour tout $f \in E$, on note : $\|f\|_\infty = \underset{x\in[0,1]}{\sup}\; \big|f(x)\big| = \sup(A_f)$. Alors $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.

Autrement dit, l'application $\|\cdot\|_\infty$ vérifie les propriétés suivantes :

1) **Séparation** :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = 0 \;\Leftrightarrow\; f = 0_{\mathbb{R}^{[0,1]}}$$

2) **Homogénéité** :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall f \in E, \quad \|\lambda \cdot f\|_\infty \;=\; |\lambda| \times \|f\|_\infty$$

3) **Inégalité triangulaire** :

$$\forall (f,g) \in E^2, \quad \|f+g\|_\infty \;\leqslant\; \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

On démontrera uniquement le point ***2.***

Démonstration.

Tout d'abord, remarquons que, pour tout $f \in E$, la quantité $\|f\|_\infty$ est bien définie.

En effet, comme f est bornée, alors $|f|$ est majorée. Ainsi l'ensemble $A_f = \{\,\big|f(x)\big| \mid x \in [0,1]\}$ est non vide et majoré. On en déduit que $\sup(A_f)$ existe.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $f \in E$.

On commence par remarquer que $\lambda \cdot f \in E$. Ainsi $\|\lambda \cdot f\|_\infty$ est bien définie.

Deux cas se présentent.

- Si $\lambda = 0$, alors :
  - × d'une part : $\|0 \cdot f\|_\infty = \|0_{\mathbb{R}^{[0,1]}}\| = 0$ (d'après ***1.***)
  - × d'autre part : $|0| \times \|f\|_\infty = 0$.

  L'égalité souhaitée est donc vraie pour $\lambda = 0$.

- Si $\lambda \neq 0$. Soit $x \in [0,1]$. On remarque tout d'abord :

$$\left|\lambda \times f(x)\right| \;=\; |\lambda| \times \left|f(x)\right| \qquad (*)$$

On procède ensuite par double inégalité.

($\leqslant$) Le réel $\|f\|_\infty$ est un majorant de A_f. Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\left|f(x)\right| \;\leqslant\; \|f\|_\infty$$

Comme $|\lambda| \geqslant 0$, on en déduit :

$$\begin{array}{ccc} |\lambda| \times \left|f(x)\right| & \leqslant & |\lambda| \times \|f\|_\infty \\ \shortparallel & & \\ \left|\lambda \times f(x)\right| & & \end{array}$$

D'où :

$$\forall x \in [0,1], \quad \left|(\lambda \cdot f)(x)\right| \;\leqslant\; |\lambda| \times \|f\|_\infty$$

Ainsi, $|\lambda| \, \|f\|_\infty$ est un majorant de $A_{\lambda \cdot f}$.
Or $\|\lambda \cdot f\|_\infty$ est le plus petit des majorants de $A_{\lambda \cdot f}$. On en conclut :

$$\|\lambda \cdot f\|_\infty \;\leqslant\; |\lambda| \, \|f\|_\infty$$

($\geqslant$) Le réel $\|\lambda \cdot f\|_\infty$ est un majorant de $A_{\lambda \cdot f}$. Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\begin{array}{ccccc} & & \left|(\lambda \cdot f)(x)\right| & \leqslant & \|\lambda \cdot f\|_\infty \\ & & \shortparallel & & \\ |\lambda| \times \left|f(x)\right| & = & \left|\lambda \times f(x)\right| & & \end{array}$$

Comme $|\lambda| > 0$, on en déduit :

$$\forall x \in [0,1], \quad \left|f(x)\right| \;\leqslant\; \frac{1}{|\lambda|} \, \|\lambda \cdot f\|_\infty$$

Ainsi, $\dfrac{1}{|\lambda|} \, \|\lambda \cdot f\|_\infty$ est un majorant de A_f.
Or $\|f\|_\infty$ est le plus petit des majorants de A_f. On en conclut :

$$\|f\|_\infty \;\leqslant\; \frac{1}{|\lambda|} \, \|\lambda \cdot f\|_\infty$$

Comme $|\lambda| > 0$, on obtient : $|\lambda| \times \|f\|_\infty \leqslant \|\lambda \cdot f\|_\infty$.

$\square$

Connaissances exigibles

Calcul d'intégrales sur un segment

- Intégration à vue
- Intégration par parties
- Changement de variables (les élèves doivent être capables de repérer des changements de variables affines et certains changement de variables usuels du type $\boxed{t = \cos(x)}$ ou $\boxed{t = \sin(x)}$)

Équations différentielles linéaires

- Définitions d'une équation différentielle d'ordre p, linéaire, à coefficients constants, homogène. Définitions d'une solution d'une équation différentielle, d'une trajectoire, d'un équilibre, d'un problème de Cauchy d'ordre p.
- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre p définie sur I est un sous-espace vectoriel de $C^p(I, \mathbb{R})$.
- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire (E) définie sur I est $\{f_0 + h \mid h \in \mathcal{S}_H\}$ où f_0 est une solution particulière de (E) et $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E).
  Méthode de résolution d'une EDL.
- Principe de superposition
- Équations différentielles linéaire d'ordre 1 :
  - × Solution de l'équation homogène associée.
  - × Solutions particulières dans le cas d'une EDL à coefficients constants.
  - × Méthode de la variation de la constante.
  - × Le problème de Cauchy d'ordre 1 admet une unique solution.
  - × L'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_H & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & g(0) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.
- Équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :
  - × Définitions d'équation caractéristique et polynôme caractéristique, régime apériodique, régime critique, régime pseudo-périodique.
  - × Solution de l'équation homogène associée.
  - × Recherche de solutions particulières.
  - × Le problème de Cauchy d'ordre 2 admet une unique solution.
  - × L'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_H & \to & \mathbb{R}^2 \\ g & \mapsto & \big(g(0), g'(0)\big) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

L'ensemble $\mathbb{R}$

- Propriétés de $+$ et $\times$
- Notion d'ordre total dans $\mathbb{R}$: définitions de $\leqslant$, $\geqslant$, $<$ et $>$, règles de calculs sur ces opérateurs.
- Majorant, minorant d'une partie de $\mathbb{R}$
- Maximum, minimum d'une partie de $\mathbb{R}$: définitions et unicité en cas d'existence
- Borne supérieure, borne inférieure : définitions, caractérisations, lien avec le maximum / minimum
- Intervalles : définition, convexité
- Ensemble $\mathbb{N}$: axiomatique de Peano et premières propriétés

- Ensemble $\mathbb{Z}$: définition et premières propriétés
- Ensemble $\mathbb{Q}$: définition, densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, approximation explicite d'un réel par une suite de rationnels.

⚠

On sanctionnera fortement les points suivants :

× toute confusion d'objets,

× toute confusion variable libre / liée (ou muette),

× tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),

× toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),

× tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration.