Programme de colle - Semaine 1

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

- si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.
- si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Somme des n premiers entiers.**

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} k \;=\; \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Démonstration.
TOUTE RÉDACTION DE LA RÉCURRENCE QUI DIFFÈRE NE SERAIT-CE QUE D'UN CARACTÈRE DE LA RÉDACTION SUIVANTE SERA CONSIDÉRÉ COMME FAUSSE

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \sum\limits_{k=1}^{n} k \;=\; \dfrac{n(n+1)}{2}$.

- **Initialisation** :
  - D'une part : $\sum\limits_{k=1}^{0} k = \sum\limits_{k\in\varnothing} k = 0$.
  - D'autre part : $\dfrac{0 \times (0+1)}{2} = 0$.

  D'où $\mathcal{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k \;=\; \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$)

$$\text{Or on a : } \sum_{k=1}^{n+1} k \;=\; \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad \textit{(par hypothèse de récurrence)}$$

$$= \frac{n+1}{2}(n+2)$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$. □

- **Somme des n premiers carrés d'entiers.**

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \ = \ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Démonstration.
TOUTE RÉDACTION DE LA RÉCURRENCE QUI DIFFÈRE NE SERAIT-CE QUE D'UN CARACTÈRE DE LA RÉDACTION SUIVANTE SERA CONSIDÉRÉ COMME FAUSSE
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^{n} k^2 \ = \ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- **Initialisation** :
  - D'une part : $\sum_{k=1}^{0} k^2 = \sum_{k \in \varnothing} k^2 = 0$.
  - D'autre part : $\frac{0 \times (0+1)(2 \times 0+1)}{6} = 0$.

  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \ = \ \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$)

$$\begin{aligned}
\text{On écrit : } \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \Big(\sum_{k=1}^{n} k^2\Big) + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{n+1}{6}\ (n(2n+1) + 6(n+1)) \\
&= \frac{n+1}{6}\ (2n^2+7n+6) \\
&= \frac{n+1}{6}\ (n+2)(2n+3)
\end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. □

- **Somme des n premiers cubes d'entiers.**

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 \ = \ \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Démonstration.
TOUTE RÉDACTION DE LA RÉCURRENCE QUI DIFFÈRE NE SERAIT-CE QUE D'UN CARACTÈRE DE LA RÉDACTION SUIVANTE SERA CONSIDÉRÉ COMME FAUSSE
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^{n} k^3 \ = \ \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

- **Initialisation** :
  - D'une part : $\sum_{k=1}^{0} k^3 = \sum_{k \in \varnothing} k^3 = 0$.
  - D'autre part : $\frac{0^2 \times (0+1)^2}{4} = 0$.

  D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **<u>Hérédité</u>** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^3 \ = \ \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$)

$$\text{On écrit : } \begin{array}{rcll} \sum\limits_{k=1}^{n+1} k^3 & = & (\sum\limits_{k=1}^{n} k^3) + (n+1)^3 & \\ & = & \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & \dfrac{(n+1)^2}{4}\ (n^2 + 4(n+1)) & \\ & = & \dfrac{(n+1)^2}{4}\ (n^2 + 4n + 4) & \\ & = & \dfrac{(n+1)^2}{4}\ (n+2)^2 & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$. □

- **Calcul d'une somme double**.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} \frac{i}{j} \right) \ = \ \frac{(n-1)n}{4}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \left(\sum\limits_{j=i+1}^{n} \dfrac{i}{j} \right) & = & \sum\limits_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \dfrac{i}{j} & \\ & = & \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=0}^{j-1} \dfrac{i}{j} \right) & \\ & = & \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\dfrac{1}{j} \sum\limits_{i=0}^{j-1} i \right) & \\ & = & \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\dfrac{1}{j} \times \dfrac{(j-1)\left((j-\cancel{1}) + \cancel{1}\right)}{2} \right) & \\ & = & \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1}{\cancel{j}}\ \dfrac{(j-1)\,\cancel{j}}{2} & \\ & = & \dfrac{1}{2} \sum\limits_{j=1}^{n} (j-1) & \\ & = & \dfrac{1}{2} \sum\limits_{k=0}^{n-1} k & \textit{(avec le décalage d'indice } k = j-1\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{2} \times \dfrac{(n-1)\left((n-\cancel{1}) + \cancel{1}\right)}{2} & \end{array}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \left(\sum\limits_{j=i+1}^{n} \dfrac{i}{j} \right) = \dfrac{(n-1)\,n}{4}$. □

- **Stricte croissance d'une fonction sur un intervalle**

  Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

  Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

  Les propositions suivantes sont équivalentes :

  (1) $\forall (x, y) \in D^2, \quad (x < y) \; \Rightarrow \; \big(f(x) < f(y)\big)$

  (2) $\forall (x, y) \in D^2, \quad (x < y) \; \Leftrightarrow \; \big(f(x) < f(y)\big)$

  Démonstration.
  On procède par double implication.

  ($\Leftarrow$) On a bien sûr : ***(2)*** $\Rightarrow$ ***(1)***.

  ($\Rightarrow$) Supposons ***(1)*** et démontrons ***(2)***.
  Soit $(x, y) \in D^2$. On procède de nouveau par double implication.

  ($\Rightarrow$) Vraie d'après ***(1)***.

  ($\Leftarrow$) On procède par contraposée.
  Supposons : $x \geqslant y$. Deux cas se présentent alors :

  × si $x = y$, alors on a toujours : $f(x) = f(y)$ par définition d'une fonction.

  × si $x > y$, alors d'après ***(1)*** : $f(x) > f(y)$.

  Finalement : $f(x) \geqslant f(y)$.
  On a bien démontrer : $\texttt{NON}(x < y) \; \Rightarrow \; \texttt{NON}(f(x) < f(y))$. □

Connaissances exigibles

Logique

- Définitions d'une proposition et d'un prédicat
- Connecteurs logiques `ET` et `OU`
  - × Distributivité de `ET` sur `OU`
  - × Distributivité de `OU` sur `ET`
- Connecteur logique `NON()`
  - × Lois de De Morgan
  - × $\texttt{NON}(\texttt{NON}(p))$ a même valeur de vérité que p
- Connecteur logique $\Rightarrow$
  - × Structure de démonstration d'une implication
  - × Transitivité de $\Rightarrow$
  - × Contraposée et structure de démonstration associée
  - × Négation d'une implication
  - × Implication réciproque
- Connecteur logique $\Leftrightarrow$
  - × Structure de démonstration d'une équivalence
  - × Vocabulaire : condition nécessaire, condition suffisante
  - × Négation d'une équivalence
- Quantificateurs
  - × Quantificateur universel $\forall$ et structure de démonstration associée
  - × Quantificateur existentiel $\exists$ et structure de démonstration associée

  - Négation d'énoncés comportant des quantificateurs
- Structure de démonstration par l'absurde
- Structure de démonstration par disjonction de cas
- Résolution d'équations et inéquations.
  On rappelle qu'il est indispensable de déterminer l'ensemble de définition d'une équation / inéquation avant de chercher à la résoudre.

Récurrence, somme, produit

- Récurrences simple, double, forte
- Sommes finies :
  - Notation $\sum$
  - Sommation d'une constante
  - Sommation par paquets (ou relation de Chasles discrète)
  - Sommation sur une union d'ensembles
  - Linéarité de $\sum$
  - Décalage d'indice et sommation dans l'autre sens
  - Sommes télescopiques
  - Sommes finies usuelles : somme des n premiers entiers, des n premiers carrés d'entiers, des n premiers cubes d'entiers et somme géométrique
  - Sommes doubles : sommes sur un rectangle, sur un triangle supérieur, sur un triangle supérieur strict. Formules d'interversion des sommes finies.
  - Produits finis

Généralités sur les fonctions

- Schéma d'étude d'une fonction
- Monotonie :
  - Définitions de croissance, décroissance, monotonie, stricte croissance, stricte décroissance, stricte monotonie d'une fonction sur un intervalle
  - Somme de fonctions croissantes, somme de fonctions décroissantes sur un même intervalle
  - Produit de fonctions croissantes positives sur un même intervalle
  - Composée de fonctions monotones sur des intervalles adéquats
- Fonctions majorées, minorée, bornées
- Extrema locaux, extrema globaux
- Borne supérieure et borne inférieure d'une fonction
- Réduction de l'ensemble d'étude par parité, par imparité, par périodicité

⚠ On sanctionnera fortement les points suivants :
- toute confusion d'objets,
- toute confusion variable libre / liée (ou muette),
- tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),
- toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),
- toute transgression à la rédaction de la récurrence vue en classe,
- tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration citées ci-dessus.