Programme de colle - Semaine 1

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Distributivité de $\texttt{ET}$ sur $\texttt{OU}$.**

  Soient p et q deux propositions mathématiques.

  La proposition $\big(p \texttt{ ET } (q \texttt{ OU } r)\big)$ a même valeur de vérité que la proposition $\big((p \texttt{ ET } q) \texttt{ OU } (p \texttt{ ET } r)\big)$.

  Démonstration.

  (i) Supposons que $p \texttt{ ET } (q \texttt{ OU } r)$ est vraie.
  Ceci signifie que les propositions p et $q \texttt{ OU } r$ sont vraies toutes les deux.
  Ainsi, l'une (au moins) des propositions q ou r est vraie.
  On procède alors par disjonction de cas sur la valeur de vérité (par exemple) de q.

  × si q est vraie : alors $p \texttt{ ET } q$ est vraie.
  Ainsi, la proposition $(p \texttt{ ET } q) \texttt{ OU } (p \texttt{ ET } r)$ est vraie.

  × si q est fausse : alors comme $q \texttt{ OU } r$ est vraie, r est forcément vraie.
  On en déduit que $p \texttt{ ET } r$ est vraie.
  Ainsi, la proposition $(p \texttt{ ET } q) \texttt{ OU } (p \texttt{ ET } r)$ est vraie.

  La proposition $(p \texttt{ ET } q) \texttt{ OU } (p \texttt{ ET } r)$ est donc vraie (puisque vraie indépendamment de la valeur de q).

  (ii) Supposons que $p \texttt{ ET } (q \texttt{ OU } r)$ est fausse.
  Ceci signifie que l'une (au moins) des propositions p ou $q \texttt{ OU } r$ est fausse.
  On procède alors par disjonction de cas sur la valeur de vérité (par exemple) de p.

  × si p est vraie : alors $q \texttt{ OU } r$ est fausse. Ainsi, q et r sont fausses.
  On en déduit que $p \texttt{ ET } q$ et $p \texttt{ ET } r$ sont fausses.
  Ainsi, la proposition $(p \texttt{ ET } q) \texttt{ OU } (p \texttt{ ET } r)$ est fausse.

  × si p est fausse : alors $p \texttt{ ET } q$ est fausse et $p \texttt{ ET } r$ est fausse.
  Ainsi, la proposition $(p \texttt{ ET } q) \texttt{ OU } (p \texttt{ ET } r)$ est fausse.

  La proposition $(p \texttt{ ET } q) \texttt{ OU } (p \texttt{ ET } r)$ est donc fausse (puisque fausse indépendamment de la valeur de p).

  □

- **Somme des n premiers entiers.**

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} k \;=\; \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Démonstration.
TOUTE RÉDACTION DE LA RÉCURRENCE QUI DIFFÈRE NE SERAIT-CE QUE D'UN CARACTÈRE DE LA RÉDACTION SUIVANTE SERA CONSIDÉRÉ COMME FAUSSE

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \sum\limits_{k=1}^{n} k \;=\; \dfrac{n(n+1)}{2}$.

▸ **Initialisation** :

× D'une part : $\sum\limits_{k=1}^{0} k = \sum\limits_{k\in\varnothing} k = 0$.

× D'autre part : $\dfrac{0\times(0+1)}{2} = 0$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k \;=\; \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$)

$$\text{Or on a : } \sum_{k=1}^{n+1} k \;=\; \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad \textit{(par hypothèse de récurrence)}$$

$$= \frac{n+1}{2}(n+2)$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$. □

- **Somme des n premiers carrés d'entiers.**

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \;=\; \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Démonstration.
TOUTE RÉDACTION DE LA RÉCURRENCE QUI DIFFÈRE NE SERAIT-CE QUE D'UN CARACTÈRE DE LA RÉDACTION SUIVANTE SERA CONSIDÉRÉ COMME FAUSSE

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \;=\; \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

▸ **Initialisation** :

× D'une part : $\sum\limits_{k=1}^{0} k^2 = \sum\limits_{k\in\varnothing} k^2 = 0$.

× D'autre part : $\dfrac{0\times(0+1)(2\times 0+1)}{6} = 0$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$)

$$\begin{aligned} \text{On écrit : } \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \Big(\sum_{k=1}^{n} k^2\Big) + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{n+1}{6}\,\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big) \\ &= \frac{n+1}{6}\,(2n^2 + 7n + 6) \\ &= \frac{n+1}{6}\,(n+2)(2n+3) \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. □

- **Somme des n premiers cubes d'entiers.**

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Démonstration.

TOUTE RÉDACTION DE LA RÉCURRENCE QUI DIFFÈRE NE SERAIT-CE QUE D'UN CARACTÈRE DE LA RÉDACTION SUIVANTE SERA CONSIDÉRÉ COMME FAUSSE

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

▸ **Initialisation** :

× D'une part : $\sum\limits_{k=1}^{0} k^3 = \sum\limits_{k \in \varnothing} k^3 = 0$.

× D'autre part : $\dfrac{0^2 \times (0+1)^2}{4} = 0$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^3 = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$)

$$\begin{aligned} \text{On écrit : } \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \Big(\sum_{k=1}^{n} k^3\Big) + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \quad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}\,\big(n^2 + 4(n+1)\big) \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}\,(n^2 + 4n + 4) \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}\,(n+2)^2 \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$. □

- **Calcul d'une somme double**.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} \frac{i}{j} \right) = \frac{(n-1)n}{4}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} \frac{i}{j} \right) &= \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{i}{j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{j-1} \frac{i}{j} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} i \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} \times \frac{(j-1)\left((j-\cancel{1})+\cancel{1}\right)}{2} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\cancel{j}} \frac{(j-1)\,\cancel{j}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (j-1) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} k && \textit{(avec le décalage d'indice } k = j-1\textit{)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{(n-1)\left((n-\cancel{1})+\cancel{1}\right)}{2}
\end{aligned}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} \frac{i}{j} \right) = \frac{(n-1)\,n}{4}$. □

Connaissances exigibles

- Définitions d'une proposition et d'un prédicat
- Connecteurs logiques `ET` et `OU`
  - × Distributivité de `ET` sur `OU`
  - × Distributivité de `OU` sur `ET`
- Connecteur logique `NON`()
  - × Lois de De Morgan
  - × `NON`(`NON`(p)) a même valeur de vérité que p
- Connecteur logique $\Rightarrow$
  - × Structure de démonstration d'une implication
  - × Transitivité de $\Rightarrow$
  - × Contraposée et structure de démonstration associée
  - × Négation d'une implication
  - × Implication réciproque

- Connecteur logique $\Leftrightarrow$
  - Structure de démonstration d'une équivalence
  - Vocabulaire : condition nécessaire, condition suffisante
  - Négation d'une équivalence
- Quantificateurs
  - Quantificateur universel $\forall$ et structure de démonstration associée
  - Quantificateur existentiel $\exists$ et structure de démonstration associée
  - Négation d'énoncés comportant des quantificateurs
- Structure de démonstration par l'absurde
- Structure de démonstration par disjonction de cas
- Résolution d'équations et inéquations.
  On rappelle qu'il est indispensable de déterminer l'ensemble de définition d'une équation / inéquation avant de chercher à la résoudre.
- Récurrences simple, double, forte
- Sommes finies :
  - Notation $\sum$
  - Sommation d'une constante
  - Sommation par paquets (ou relation de Chasles discrète)
  - Sommation sur une union d'ensembles
  - Linéarité de $\sum$
  - Décalage d'indice et sommation dans l'autre sens
  - Sommes télescopiques
  - Sommes finies usuelles : somme des n premiers entiers, des n premiers carrés d'entiers, des n premiers cubes d'entiers et somme géométrique
  - Sommes doubles : sommes sur un rectangle, sur un triangle supérieur, sur un triangle supérieur strict. Formules d'interversion des sommes finies.

On sanctionnera fortement les points suivants :

- toute confusion d'objets,
- toute confusion variable libre / liée (ou muette),
- tout oubli d'introduction de variable (cela rejoint le point précédent),
- toute erreur de logique (absence ou erreur de connecteur logique par exemple),
- toute transgression à la rédaction de la récurrence vue en classe,
- tout manque de réflexe dans l'utilisation des structures de démonstration citées ci-dessus.