## Divisibilité

**Exercice 1**
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $5n^3 + n$ est divisible par 6.
*Indication : être divisible par* $6$*, c'est être divisible par* $3$ *et par* $2$*.*

**Exercice 2**
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ est divisible par 9.
*Indication : calculer la congruence de* $(3k)^3$, $(3k+1)^3$ *et* $(3k+2)^3$ *modulo* $9$.

**Exercice 3**
Montrer que, pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$, si 9 divise $a^3 + b^3 + c^3$, alors 3 divise $\text{ppcm}(a,b,c)$.
*Même indication qu'à l'exercice 2.*

**Exercice 4**
Montrer qu'un entier de la forme $8n+7$ ne peut être somme de trois carrés parfaits.
*Indication : on pourra raisonner par l'absurde, regarder la parité de ces trois carrés parfaits, puis la congruence modulo* $8$ *de* $(4k+1)^2$ *et* $(4k+3)^2$.

**Exercice 5**
Les questions ci-dessous sont mutuellement indépendantes.

1. Déterminer le nombre de zéros terminant l'écriture décimale de 2020!.
2. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de $2^{2020}$.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de $10^{100}$ par 247.
   *Indication :* $12^3 + 1$ *est divisible par* $247$.
4. Déterminer le reste de la division euclidienne de $1715^{1715}$ par 13.
5. Trouver le dernier chiffre de l'écriture décimale de $2017^{2019^{2021}}$ et de $2019^{2021^{2023}}$.

**Exercice 6**
Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$. Supposons : $x^2 - y^2 \equiv 1\ [5]$. Démontrer : $5 \mid xy$.
*Indication : on pourra commencer par examiner la congruence modulo* $5$ *de* $a^2$ *en fonction de la congruence modulo* $5$ *de* $a$.

## Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun

**Exercice 7**
Déterminer le PGCD et le PPCM des familles d'entiers suivantes.

1. $(15, 25, 35, 45)$
2. $(734, 848)$
3. $(78, 91, 143, 169)$

**Exercice 8**
Soit $p$ un entier naturel qui n'est divisible ni par 2 ni par 3. Démontrer : $24 \mid p^2 - 1$.

**Exercice 9**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2}$ n'est pas décimal.

**Exercice 10**
Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ n'est pas un rationnel.

**Exercice 11**
Trouver un entier naturel dont le produit des diviseurs vaut $45^{42}$.

**Exercice 12**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer : $(n! + 1) \wedge \big((n+1)! + 1\big) = 1$.

**Exercice 13**
Soit $(p,q,r) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $p \wedge q = 1$. Démontrer : $p \wedge r = p \wedge qr$.

**Exercice 14**

Soit $(a, b) \in [\![0, 10]\!]^2$.

*1.* Montrer que $a^2 + b^2$ est divisible par 11 si et seulement si $a = b = 0$.
*Indication : on pourra faire une étude exhaustive de tous les cas.*

*2.* En déduire que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, 11 divise $a^2 + b^2$ si et seulement si 11 divise $a$ et 11 divise $b$.

## Congruences

*Soit $(a, b, n) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^*$. On dit que $a$ est congru à $b$ modulo $n$ et on note $a \equiv b\ [n]$ si et seulement si $n$ divise $b - a$. En notant $a$, $b$, $c$ et $d$ quatre entiers relatifs, $n$ un entier relatif non nul et $p$ un entier naturel, on peut énoncer les propriétés utiles de la relation de congruence modulo $n$, que l'on peut utiliser sans preuve.*

*(1)* Symétrie : Si $a \equiv b\ [n]$, alors $b \equiv a\ [n]$.

*(2)* Transitivité : Si $a \equiv b\ [n]$ et $b \equiv c\ [n]$, alors $a \equiv c\ [n]$.

*(3)* Compatibilité avec la somme : Si $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$, alors $a + c \equiv b + d\ [n]$.

*(4)* Compatibilité avec le produit : Si $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$, alors $ac \equiv bd\ [n]$.

*(5)* Compatibilité avec l'exponentiation entière : Si $a \equiv b\ [n]$, alors $a^p \equiv b^p\ [n]$.

**Exercice 15**

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^2 \times (\mathbb{Z}^*)^2$. Démontrer :

*1.* si $a \equiv b\ [c]$ et $d \mid c$, alors $a \equiv b\ [d]$

*2.* si $a \equiv b\ [c]$ et $a \equiv b\ [d]$, alors $a \equiv b\ [c \vee d]$.

*3.* si $ac \equiv bc\ [d]$ et $c \neq 0$, alors $a \equiv b\ [d/(d \wedge c)]$

**Exercice 16**

Soit $(a, b, n) \in \mathbb{Z}^3$. On veut résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E)$ $ax \equiv b\ [n]$.

*1.* Montrer que, si $(E)$ admet une solution, alors $a \wedge n \mid b$.

*2.* On suppose : $a \wedge n \mid b$. Justifier l'existence de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $a \wedge n = \alpha a + \beta n$.
Montrer alors que l'ensemble des solutions de $(E)$ est :

$$\{\, (\alpha b + \lambda n)/(a \wedge n) \mid \lambda \in \mathbb{Z} \,\}$$

**Exercice 17**

Soit $x \in \mathbb{Z}$.

*1.* Montrer que $x^2 \equiv 1\ [35]$ si et seulement si $\big(x \equiv 1\ [5]$ ou $x \equiv -1\ [5]\big)$ et $\big(x \equiv 1\ [7]$ ou $x \equiv -1\ [7]\big)$.

*2.* Résoudre alors l'équation $x^2 \equiv 1\ [35]$.

**Exercice 18**

Soit $(a, b, \alpha, \beta) \in (\mathbb{Z}^*)^4$. On veut résoudre dans $Z$ : $(E)$ $x \equiv \alpha\ [a]$ et $x \equiv \beta\ [b]$.

*1.* Montrer que si $(E)$ admet une solution, alors : $a \wedge b \mid \alpha - \beta$.

*2.* On pose : $a' = a/(a \wedge b)$ et $b' = b/(a \wedge b)$. Montrer qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $a'u + b'v = 1$.
On pose alors : $y = a'u\beta + b'v\alpha$. Montrer que, si $a \wedge b \mid \alpha - \beta$, alors $y$ est solution de $(E)$ et que l'ensemble des solutions de $(E)$ est $\{y + \lambda(a \vee b) \mid \lambda \in \mathbb{Z}\}$.

*3.* Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} x \equiv 3\ [4] \\ x \equiv 4\ [5] \end{cases}$

**Exercice 19**

On considère la suite $(u_n)$ d'entiers naturels définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 5\,u_n - 6 \end{cases}$$

*1.* Quelle conjecture peut-on émettre sur les deux derniers chiffres de $(u_n)$ ?

*2.* Montrer que pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+2} \equiv u_n\ [4]$.
En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$u_{2k} \equiv 2\ [4] \qquad \text{et} \qquad u_{2k+1} \equiv 0\ [4]$$

*3.* ***a)*** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $2\,u_n = 5^{n+2} + 3$.

***b)*** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $2\,u_n \equiv 28\ [100]$.

*4.* Valider la conjecture émise à la première question.

**Exercice 20**

*1.* Donner une condition nécessaire et suffisante sur les décimales d'un entier naturel $n$ pour que $3 \mid n$ (resp. $11 \mid n$).

*2.* En quelles bases l'écriture d'un entier naturel donné en base 10 est-elle évidente à trouver ?

*3.* Étudier alors la divisibilité de $11\,257\,838\,271\,654\,382\,948\,276$ par 7, puis par 37.

**Exercice 21**

Quel est le dernier chiffre de l'écriture en base 10 de $7^{(7^7)}$ ?

**Exercice 22**

Résoudre les systèmes suivants, d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.

*1.* $6x + 1 \equiv 5\ [9]$

*2.* $\begin{cases} x \equiv 2\ [7] \\ x \equiv -1\ [8] \end{cases}$

*3.* $\begin{cases} x \equiv 1\ [12] \\ x \equiv 3\ [8] \end{cases}$

*4.* $\begin{cases} 2x \equiv 1\ [7] \\ 3x \equiv 1\ [8] \end{cases}$

*Indication : on pourra chercher une solution particulière dans chacun des trois systèmes, afin de les remettre sous la forme* $\begin{cases} y \equiv 0\ [p] \\ y \equiv 0\ [q] \end{cases}$ *avec $p$ et $q$ premiers entre eux.*

## Nombres premiers

**Exercice 23**

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur l'entier naturel $n$ pour que $-1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$ soit un nombre premier.

**Exercice 24**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $2^n - 1$ est premier, il en est de même de $n$. Que dire de la réciproque ?

**Exercice 25**

Soit $a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n + 1$ soit premier. Montrer que $a$ est pair, puis qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^m$.

*Indication : on pourra écrire $n$ sous la forme d'un produit d'un nombre impair et d'une puissance de 2.*

**Exercice 26**

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

*Indication : on pourra raisonner par l'absurde.*

**Exercice 27**

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ un couple d'entiers premiers entre eux. Montrer que si $ab$ est un carré parfait, alors $a$ et $b$ sont des carrés parfaits.

**Exercice 28.** *Raréfaction des nombres premiers*

Montrer qu'il existe des intervalles de $\mathbb{N}$ de longueur aussi grande que l'on veut qui ne contiennent aucun nombre premier.

**Exercice 29**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $F_n = 2^{2^n} + 1$. La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme celle des *nombres de Fermat* dont on a cru, un temps, qu'elle était constituée de nombres premiers. Euler démontra que $F_5$ n'était pas premier, mettant fin à cette croyance.

*1.* **Pourquoi imposer un exposant égal à une puissance de 2 ?**
Soit $a \in \mathbb{N}$. Montrer que si $2^a + 1$ est premier, alors $a$ est une puissance de 2.

*2.* **Relation entre les $F_n$.**
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1 \quad \text{et} \quad F_n = 2 + \prod_{i=0}^{n-1} F_i$$

*3.* En déduire que les $F_n$ sont deux-à-deux premiers entre eux.

**Exercice 30**

On considère l'application $\varphi$ définie par :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{N}^* \\ & n & \mapsto & \mathrm{Card}\big(\{m \in \mathbb{N}^* \mid m \leqslant n \ \texttt{ET} \ m \wedge n = 1\}\big) \end{array}$$

Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $\displaystyle\sum_{\substack{d \in \mathbb{N}^* \\ d \mid n}} \varphi(d) = n$.

**Exercice 31**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p_n$ le $n^{\text{ème}}$ nombre premier.

*1.* Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ p_{n+1} \leqslant p_1 \cdots p_n + 1$$

*2.* En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \leqslant 2^{2^n}$.

*3.* ***a)*** Démontrer : $\forall n \geqslant 3$, $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{n-1}} \geqslant 2^{2^n}$.

***b)*** Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à $x$. Montrer que pour $x$ assez grand :

$$\ln\big(\ln(x)\big) \leqslant \pi(x) \leqslant x$$