Calcul de limites

Exercice 1

Déterminer les limites des fonctions suivantes.

a. Limite de $f : x \mapsto \dfrac{-5x^2+37x-4}{8x^2-2}$ en $+\infty$.

b. Limite de $f : x \mapsto \dfrac{x^7\,\mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^{2x}}{x^3(\ln x)+x(\ln x)^5}$ en $+\infty$.

c. Limite de $g : x \mapsto \dfrac{x\mathrm{e}^x + x^2 + \mathrm{e}^{x^3}}{x^7+5}$ en $-\infty$.

d. Limite de $h : x \mapsto \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)$ en $+\infty$.

e. Limite de $f : x \mapsto \sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}$ en $+\infty$.

f. Limite de $g : x \mapsto \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$ en $+\infty$.

g. Limite de $f : x \mapsto \sqrt{\ln(x^2+1)}-\sqrt{\ln(x^2-1)}$ en $+\infty$.

h. Limite de $g : x \mapsto \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x(x-1)}}$ en 0^+.

i. Limite de $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)-\cos(x)}{\pi-4x}$ en $\dfrac{\pi}{4}$.

j. Limite de $g : x \mapsto \cos\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$

k. Limite de $f : x \mapsto \dfrac{x^3+2x^2+1}{4x^2+3x+1}\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$

l. Limite de $f : x \mapsto \sin\big(\ln(x+1)\big)-\sin\big(\ln(x)\big)$ en $+\infty$

m. Limite de $g : x \mapsto \dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$ en 0

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes.

a. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{9x^3}$

b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x-1}}{(\ln x)^4}$

c. $\displaystyle\lim_{x\to3^+} \frac{2x^2-3x+2}{x^2-9}$

d. $\displaystyle\lim_{x\to1} \ln(x+3)-\ln(x-1)$

e. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}$

f. $\displaystyle\lim_{x\to3^+} \frac{1}{x-3}-\frac{1}{x^2-9}$

g. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^x$

h. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^3)^x}{(3^x)^3}$

i. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{(x^3)^x}{(3^x)^3}$

j. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x+3)-\ln(x-1)$

k. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x^2+1)-2\ln x$

l. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{x\ln x}{\sqrt{x}+1}$

m. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^4\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$

n. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x^3}}{x}$

Exercice 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$f(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(2x)-f(x)}{x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$$

1. Que vaut : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)+f\left(\frac{x}{2^n}\right)$?

2. En déduire : $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$.

Calcul de limites par changement de variable

Exercice 4

Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to 0^+} \quad x\ \ln(x)$ *(on pourra poser* $X = \dfrac{1}{x}$*)*

b. $\lim\limits_{x\to 1^+} \quad (x-1)^2\ \ln(x-1)$ *(on pourra poser* $X = x-1$*)*

c. $\lim\limits_{x\to 0^+} \quad x^2\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ *(on pourra poser* $X = \dfrac{1}{x}$*)*

d. $\lim\limits_{x\to 4} \quad \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ *(on pourra poser* $X = \sqrt{x}$*)*

Utilisation du taux d'accroissement

Exercice 5

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On suppose que f est non nulle au voisinage de x_0.
On suppose enfin que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

1. Démontrer que $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$.

(autrement dit : $\ln(1+f(x)) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x)$*)*

2. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^3)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\mathrm{e}^{-x})$.

Exercice 6

Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to 0} (\ln(\mathrm{e}+x))^{\frac{1}{x}}$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(1+\mathrm{e}^{-x}))^{\frac{1}{x}}$

Exercice 7

Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to 0^+} \quad \left(1+x^3\right)^{1/x}$

b. $\lim\limits_{x\to 0^+} \quad \dfrac{\ln(1-5x)}{x}$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \quad x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} \quad \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

e. $\lim\limits_{x\to 0^+} \quad (1+x)^{\frac{1}{x}}$

f. $\lim\limits_{x\to 0} \quad \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

g. $\lim\limits_{x\to 0} \quad \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$

h. $\lim\limits_{x\to 0} \quad (1+x)^{\ln x}$

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} \quad \dfrac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$

j. $\lim\limits_{x\to+\infty} \quad x\ \ln\left(\dfrac{x+5}{x+3}\right)$

Exercice 8

On considère la fonction $f(x) = (\ln x)^{\ln(\mathrm{e}-x)}$ et on se propose de déterminer sa limite pour $x \to \mathrm{e}^-$ (e par valeurs strictement inférieures).

a. On pose $X = \dfrac{x}{\mathrm{e}}$. Exprimer $f(x)$ en fonction de X.

b. Montrer que $\lim\limits_{X\to 1^-} \dfrac{\ln(1+\ln X)}{X-1} = 1$.

c. Montrer que $\lim\limits_{X\to 1^-} \dfrac{1+\ln(1-X)}{\ln(1-X)} = 1$.

d. En déduire que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \exp(-(1-X)\ln(1-X)\ H(X))$$

où $H(X)$ est une fonction telle que $\lim\limits_{X\to 1^-} H(X) = 1$.

e. En déduire $\lim\limits_{x\to \mathrm{e}^-} f(x)$.
(on pourra poser $T = 1-X$*)*

Limite à droite, limite à gauche

Exercice 9

Soit $a \in \mathbb{R}$.

a. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est-elle continue en a ?

b. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$ est-elle continue en a ?

Exercice 10

Étudier la continuité au point x_0 des fonctions suivantes.

a. $x_0 = 2$ et $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$

b. $x_0 = -\dfrac{1}{2}$ et $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2+5x-4}{2x+1} & \text{si} \quad x \neq -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

c. $x_0 = 0$ et $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x - \mathrm{e}^{1/x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

d. $x_0 = 0$ et $h(x) = \begin{cases} x \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

e. $x_0 = 1$ et $j(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{x} - 1) - \ln(x-1) & \text{si} \quad x > 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$

f. $x_0 = 0$ et $k(x) = \dfrac{x^2 + 2|x|}{x}$

Utilisation d'inégalités

Exercice 11

Déterminer les limites suivantes.

a. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2x + \lfloor x \rfloor}{1 - \lfloor x \rfloor}$ ***b.*** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{\lfloor \frac{3}{x} \rfloor}$

Exercice 12

Déterminer les limites suivantes.

a. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{x^3}}{x}$ ***b.*** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x\mathrm{e}^x + x^2 + \mathrm{e}^{x^3}}{x^3+5}$

Exercice 13

On considère la fonction $f : x \mapsto (x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{\ln(x)}}$.

Le but est de trouver la limite de f en 1^-.

a. Effectuer le changement de variable $X = 1 - x$.

b. Démontrer que : $\forall u > -1,\ \ln(1+u) \leqslant u$.

c. En déduire que : $\forall u > -1,\ u \times \mathrm{e}^{\frac{1}{\ln(1+u)}} \geqslant u \times \mathrm{e}^{\frac{1}{u}}$.

d. Déterminer $\displaystyle\lim_{u \to +\infty} u \times \mathrm{e}^{\frac{1}{u}}$ et conclure.

Exercice 14

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x}}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x(x-1)}}$

Le but est de trouver la limite de f en 1^+.

a. Effectuer le changement de variable $X = 1 - x$.

b. Démontrer que : $\forall u > 0,\ 0 < \dfrac{(1-u)^3}{\sqrt{u}} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{-u+u^2}} \leqslant (1-u)^3 \times \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{u}}}{\sqrt{u}}$.

c. Déterminer $\displaystyle\lim_{u \to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{u}}}{\sqrt{u}}$ et conclure.

Calcul d'équivalents

Exercice 15

Donner un équivalent simple des fonctions suivantes aux points indiqués.

a) $f_1 : x \mapsto \dfrac{x^3 - \ln x}{2 + x\mathrm{e}^{-x}}$ en 0 et en $+\infty$

b) $f_2 : x \mapsto x^2 \left(\ln(1+x)\right)^4$ en 0 et en $+\infty$

c) $f_3 : x \mapsto \ln(x) - \ln(2)$ en 2

d) $f_4 : x \mapsto \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ en $\dfrac{\pi}{4}$

e) $f_5 : x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ en 0 et en $+\infty$

f) $f_6 : x \mapsto x\ln(1+x) - (x+1)\ln x$ en 0 et en $+\infty$

g) $f_7 : x \mapsto \tan\left(\dfrac{\pi\, x}{2x+3}\right)$ en $+\infty$

h) $f_8 : x \mapsto \mathrm{e}^{\sin(x)} - \mathrm{e}^{\tan(x)}$ en 0

Limites infinies, définitions équivalentes

Exercice 16

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$.
Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

a. f admet la limite $+\infty$ en x_0.

b. $\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant B)$

c. $\forall B \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant B)$

Exercice 17

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$.
Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

a. f admet la limite $-\infty$ en x_0.

b. $\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant -B)$

c. $\forall B \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant B)$

Exercice 18

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

a. f admet la limite $-\infty$ en $+\infty$.

b. $\forall B > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \geqslant A \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant -B)$

c. $\forall B \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ (x \geqslant A \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant B)$

Démonstration « avec les ε »

Exercice 19

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$.

a. Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \to \lim_{x \to x_0^-} (f+g)(x) = +\infty$$

Quel énoncé peut-on écrire quand $x \to x_0^+$?

b. Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell_1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell_2 \end{array}\right\} \to \lim_{x \to +\infty} (f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2$$

c. Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell_2 \end{array}\right\} \to \lim_{x \to x_0} (f \times g)(x) = \ell_1 \ell_2$$

On pourra remarquer que :
$f(x)g(x) - \ell_1\ell_2 = f(x)(g(x) - \ell_2) + \ell_2(f(x) - \ell_1)$.

Exercice 20
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$.
Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ bornée} \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f \times g)(x) = 0$$

Exercice 21
Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$. Montrer que f est constante.

Exercice 22
Montrer qu'une fonction réelle définie et périodique sur $\mathbb{R}$, admettant une limite en $+\infty$ est constante.

Exercice 23
Montrer qu'une fonction réelle f, définie sur $\mathbb{R}$, admettant une limite en 0 et vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(2x) = f(x)$ est constante.

Régularité des fonctions réelles

Exercice 24
On considère la fonction :

$$\begin{array}{rcll} f & : & \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers a telle que la suite $\big(f(u_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $1 - a$, et d'une suite réelle $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers a telle que la suite $\big(f(v_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a.

2. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, f est discontinue en a (on pourra raisonner par l'absurde).

3. Montrer que f est continue en $\frac{1}{2}$ (on reviendra à la définition formelle de la notion de limite).

Exercice 25
On considère la fonction :

$$\begin{array}{rcll} f & : &]0, \pi[& \to \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} \end{array}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $]0, \pi[$.

2. Démontrer que f réalise une bijection de réciproque dérivable.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, donner une expression explicite $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

4. Calculer alors la dérivée de $\arctan + f^{-1}$. Que peut-on en conclure ?

Prolongement par continuité

Exercice 26
Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes, puis rechercher si elles admettent un prolongement par continuité aux bornes de cet ensemble de définition :

a. $f_1(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x + 2}$

b. $f_2(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{\sqrt{x + 2}}$

c. $f_3(x) = \dfrac{x \ln x}{x - 1}$

d. $f_4(x) = \dfrac{x - 1}{\ln x}$

Exercice 27
On considère la fonction :

$$\begin{array}{rcll} f & : & \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto \dfrac{1 - \sin(x)}{\sin\big(\cos(x)\big)} \end{array}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Prolonger f par continuité en tous les points de $\mathbb{R}$ où cela est possible.

Exercice 28
On considère la fonction :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Suites implicites

Exercice 29
On considère la fonction :

$$f : [1, +\infty[\to [1, +\infty[, \quad t \mapsto t + \ln(t)$$

1. Montrer que f est bijective.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = f^{-1}(n)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $2\,u_n \geqslant n$. Que peut-on déduire sur le comportement asymptotique de la suite (u_n) ?

3. Démontrer : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = u_n - n$.

a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n + \ln\left(1 + \frac{v_n}{n}\right) + \ln(n) = 0$.

b) En déduire un équivalent de $(u_n - n)$.

Exercice 30
Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction :

$$f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{e^t}{1+t^n}$$

1. Expliciter, pour tout entier naturel non nul n, la dérivée de f_n.

2. Dans cette question, n est un entier naturel supérieur ou égal à 3.

a) Déterùiner une fonction polynomiale g_n telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} f_n'(t) = 0 \Leftrightarrow g_n(t) = 0 \\ f_n'(t) > 0 \Leftrightarrow g_n(t) > 0 \end{cases}$$

b) Montrer alors que g_n s'annule exactement deux fois : une fois sur $]0,1[$ et une fois sur $]1, +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations complet de f_n

3. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on note a_n la solution de l'équation $g_n(x) = 0$ d'inconnue x appartenant à $]0,1[$.

a) Si A est un élément de $]0,1[$, préciser, si elle existe, la limite de la suite $(1 + A^n - n\,A^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) En déduire l'existence d'un entier N supérieur ou égal à 3 tel que, pour tout $n \geqslant N$, $A \leqslant a_n \leqslant 1$. Que vient-on de démontrer ?

4. Démontrer : $a_n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Déterminer enfin, si elle existe, la limite de la suite $\big(f_n(u_n)\big)_{n\geqslant 3}$.

Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 31

Simplifier les expressions : $\sin\big(\arccos(x)\big)$, $\tan\big(\arcsin(x)\big)$, $\tan\big(2\arcsin(x)\big)$ et $\sin\big(2\arctan(x)\big)$ pour les réels x pour lesquels elles sont définies.

Exercice 32

On pose $x = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$. Calculer $\cos(2x)$ et donner une valeur explicite de x.

Exercice 33

Déterminer les domaines de définition de chacune des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \arcsin(2x^2 - 3x + 2)$

2. $x \mapsto \arccos(4x^3 - 3x)$

3. $x \mapsto \arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

Exercice 34

On considère la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$.

1. Donner le domaine de définition de f et préciser la régularité de f.

2. Donner une expression explicite de f'. Simplifier alors l'expression de f.

3. En calculant, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ où cela a un sens, $f\big(\tan(x)\big)$, retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 35

On considère la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Que pouvez-vous dire concernant la régularité de f sans étude particulière ?

3. Donner une expression explicite de $f'(x)$ pour tout réel x où cela a un sens. Que pouvez-vous en conclure ? Que dire alors de la dérivabilité de f en 1 ?

Exercice 36

1. Démontrer : $\forall x \in [-1,1]$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Résoudre alors le système suivant, d'inconnue $(x,y) \in [-1,1]^2$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \arcsin(y) & = & 2\arcsin(x) \\ 2\arccos(y) & = & \arccos(x) \end{array}\right.$$

Exercice 37

Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Écrire une relation analogue valable sur $\mathbb{R}_-^*$.

Exercice 38

Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\arctan\big(\mathrm{sh}(x)\big) = \arccos\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)$.

Exercice 39

On considère l'équation (E) $\arctan(x) + \arctan(x-1) + \arctan(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$ d'inconnue réelle x, dont on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions.

1. Montrer que si x est une solution de (E), alors : $\dfrac{2x}{2-x^2} = \dfrac{1}{x}$. (on pourra utiliser la fonction tangente)

2. Déduire de la question précédente : $\mathcal{S} \subset \left\{-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$.

3. On introduit la fonction f définie par $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan(x-1) + \arctan(x+1)$.

a) Préciser les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ ainsi que les variations de f au sens strict. Que peut-on en déduire sur l'ensemble $\mathcal{S}$?

b) Calculer $f(0)$. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 40
En s'inspirant des méthodes de l'exercice 39, résoudre les équations suivantes d'inconnue réelle x.

1. $\arctan(2x) + \arctan(x) = \dfrac{\pi}{4}$

2. $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$

Exercice 41
On considère l'équation (E) $2\arcsin(x) = \arcsin\left(2\,x\sqrt{1-x^2}\right)$ d'inconnue réelle x, dont on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions.

1. On considère la fonction :

$$g: \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 4\,x^2\,(1-x^2) \end{array}$$

Montrer que l'ensemble des valeurs prises par cette fonction est inclus dans $[0,1]$ (on pourra étudier directement deux inéquations ou déterminer les variations de la fonction).
En déduire que l'ensemble $\mathcal{S}$ est inclus dans l'intervalle $[-1,1]$.

2. Soit $x \in [-1,1]$.

a) Justifier l'existence et l'unicité de $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que : $\sin(\alpha) = x$.

b) Montrer alors que x est une solution de l'équation (E) si et seulement si $2\alpha = \arcsin\big(\sin(2\alpha)\big)$.

c) En déduire l'ensemble $\mathcal{S}$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 42
Montrer qu'un polynôme de degré impair a au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

Exercice 43
Montrer que les équations suivantes ont une solution dans l'intervalle I :

a) $\ln x = \dfrac{x^2-5}{x+2}$ sur $I = [1, 10]$.

b) $x^{2015} - x^{2016} = -1$ sur $I = [-1, 1]$.

c) $x^n + 9x^2 - 4 = 0$, sur $I = \mathbb{R}_+^*$ (n est un entier positif).

d) $x\,\ln x = 2$ sur $I = [2, 3]$.

Exercice 44
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
On suppose que : $\forall x \in I,\ |f(x)| = 1$.

Montrer que f est constante sur I.

Exercice 45
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
On suppose que : $\forall x \in I,\ f^2(x) = 1$.

Montrer que f est constante sur I.

Exercice 46
Soit f une fonction continue définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans $[a, b]$.

Montrer que f admet un point fixe : $\exists x_0 \in [a, b],\ f(x_0) = x_0$.
(on pourra considérer la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$)

Exercice 47
Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que :

$$f(0) = g(1) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = g(0) = 1$$

Montrer que : $\forall \lambda \geqslant 0,\ \exists x_0 \in [0,1],\ f(x_0) = \lambda\, g(x_0)$.
(on pourra considérer la fonction $h : x \mapsto f(x) - \lambda\, g(x)$)

Continuité sur un segment

Exercice 48
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$ et une limite finie en $-\infty$.

Montrer que f est bornée dans $\mathbb{R}$.

Exercice 49

1. Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique est bornée et atteint ses bornes.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a < b$. Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer :
$$\sup_{[a,b]} (f) = \sup_{]a,b[} (f)$$
On commencera par montrer que ces bornes supérieures existent.

3. Soient f et g deux fonctions continues définies sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x \in [a, b], \quad 0 < f(x) < g(x)$$
Montrer qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que :
$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) \leqslant k\, g(x)$$

Exercice 50
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
On suppose que : $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Montrer que f est bornée et atteint sa borne supérieure. Qu'en est-il de sa borne inférieure ?

Exercice 51
Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $\forall x \in [-1, 1],\ f(x) > 0$.

Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a : $f(x) \geqslant m$.

Théorème de la bijection

Exercice 52
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, on note : $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1$.

a) Dresser le tableau de variation de f_n sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer qu'il existe un unique u_n positif tel que $f_n(u_n) = 0$.

c) Calculer u_1.

d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

e) En déduire le signe de u_n et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$.

f) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

g) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, f_n(x) = \dfrac{2x - x^{n+1} - 1}{1 - x}$.

h) En déduire que : $2\, u_n - 1 = u_n^{n+1}$.

i) Démontrer que (u_n^{n+1}) converge vers 0 et en déduire la limite de (u_n).

Exercice 53

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)\ln(x+1)}{x}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$ puis déterminer son signe.
Pour ce faire, on pourra étudier la fonction auxiliaire $g : x \mapsto x - \ln(x+1)$ définie pour $x > -1$.

c) Montrer que f peut être prolongée par continuité à $[-1, +\infty[$ et dresser son tableau de variation.

d) Démontrer qu'il existe un unique $\alpha \in [-1, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 2$.

e) Montrer que : $3 < \alpha < 4$.
On pourra utiliser le fait que : $\ln 2 \approx 0,69$ *et* $\ln 5 \approx 1,61$.

Exercice 54

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + nx$

a) Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.

b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Calculer les limites de f_n quand $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$.

d) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$.
On notera u_n cette solution.

e) Montrer qu'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{-1}{n} < u_n < 0$.

f) En déduire la limite de la suite (u_n).

g) En revenant à la définition de u_n, montrer que : $n\, u_n \to -\dfrac{1}{2}$.

Théorème de la limite monotone

Exercice 55

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}$.
On souhaite démontrer que la fonction f admet un unique point fixe autrement dit qu'il existe un unique réel c tel que $f(c) = c$.
Pour ce faire, on considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.

a) Démontrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

b) En déduire que f admet un point fixe.

c) En procédant par l'absurde, démontrer que ce point fixe est unique.

d) Ce résultat est-il valable si la fonction f est croissante ?

Exercice 56

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante sur un intervalle I.
On suppose que $f(I)$ est un intervalle.
On souhaite démontrer que la fonction f est continue.

1. ***a)*** Soit $a \in \mathring{I}$. Démontrer que f admet une limite finie ℓ à droite en a qui vérifie : $f(a) \leqslant \ell$.

b) Démontrer que : $\forall x \in I,\ x \leqslant a \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant f(a)$.

c) Démontrer que : $\forall x \in I,\ x > a \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant \ell$.

Ceci permet de démontrer que f n'atteint aucune valeur entre $f(a)$ et ℓ.
On suppose maintenant par l'absurde que $f(a) < \ell$.

2. ***a)*** Si $b \in I$ est tel que $b > a$, démontrer que : $f(a) \leqslant \ell \leqslant f(b)$.
(question supplémentaire : pourquoi existe-t-il un tel élément b ?)

b) En déduire que ℓ est une valeur atteinte par f.

c) En déduire une contradiction.

d) En conclure que f est continue sur I.

3. Le résultat est-il valable si f est décroissante ?

(ce résultat est la brique manquante de la démonstration du théorème de la bijection présentée dans le cours)