Propriétés de $\mathbb{R}$

Exercice 1

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (a,b) \in A \times B,\ a \leqslant b$$

1. Démontrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et : $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.

2. On suppose maintenant :

$$\forall (a,b) \in A \times B,\ a < b$$

Peut-on en conclure : $\sup(A) < \inf(B)$?

Exercice 2

Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$. Démontrer :

$$\sup_{(x,y)\in A^2} |x-y| \ = \ \sup(A) - \inf(A)$$

Exercice 3

Déterminer, s'ils existent, les bornes supérieures, les bornes inférieures, les maxima et les minima des parties de $\mathbb{R}$ suivantes.

1. $A \ = \ \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \mid (n,p) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2 \right\}$

2. $B \ = \ \left\{ \dfrac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$

3. $C \ = \ \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^p \mid (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \right\}$

Exercice 4

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose :

$$\begin{aligned} C &= \{a+b \mid (a,b) \in A \times B\} \\ D &= \{\lambda\, a \mid a \in A\} \\ E &= \{a\, b \mid (a,b) \in A \times B\} \end{aligned}$$

1. Démontrer que $\sup(C)$ existe et vaut $\sup(A) + \sup(B)$.

2. Que peut-on dire de l'existence et de la valeur de $\sup(D)$ et $\sup(E)$?
On pourra formuler des hypothèses supplémentaires adéquates sur A et B.

Récurrence

Exercice 5

Montrer que $\forall n \geqslant n_0,\ 2^n > n^2$ (l'entier $n_0 \in \mathbb{N}$ est à déterminer).

Récurrence double

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = -5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$

Démontrer que, pour tout entier naturel n on a : $u_n = 8 \times 2^n - 7 \times 3^n$.

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Récurrence forte

Exercice 8
Démontrer que tout entier naturel $n \geqslant 2$ admet un diviseur premier.

Propriétés des suites

Exercice 9
On considère une suite (u_n) vérifiant la propriété :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant M$$

a. Donner la négation de cette propriété.

b. Montrer que la suite (u_n) est majorée. On exhibera l'un de ses majorants.

Exercice 10

a. La suite $\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$ est-elle majorée ? Minorée ?
Admet-elle une borne supérieure ? Une borne inférieure ?

b. Répondre aux mêmes questions dans le cas de la suite $\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)$.

Exercice 11
Soit $q > 0$.

a. Étudier le sens de variation de la suite : $\left(\dfrac{q^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

b. A-t-elle un minimum, un maximum, des bornes inférieure et supérieure ?

Exercice 12 *(Sens de variation)*
Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) définies par :

a. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ***b.*** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}}$

Exercice 13 *(Suites extraites)*
On considère la suite (S_n) de terme général : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a. Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont des suites extraites de la suite (S_n).

b. Déterminer le sens de variation des suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}).

Suites classiques

Exercice 14
Pour chacune des suites suivantes, définies par récurrence, donner une expression explicite de u_n.

a. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4u_n - 6$.

b. $u_0 = 1\,;\ u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

c. $u_0 = 1\,;\ u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

d. $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{2}$.

e. $u_0 = 2\,;\ u_1 = \dfrac{10}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 3u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$.

Exercice 15 *(Somme d'une suite arithmétique)*
Soit (u_n) une suite arithmétique.

a. Montrer que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ u_k + u_{n-k} = u_0 + u_n$.

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$.

c. Retrouver la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} k$ à l'aide de cette formule.

Exercice 16

Déterminer les suites bornées vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$$

Exercice 17

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n \end{cases}$

a. Déterminer trois réels a, b et c tels que la suite (v_n) de terme général $v_n = u_n + an^2 + bn + c$ soit une suite géométrique.

b. En déduire une expression de u_n.

Exercice 18

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3^n \end{cases}$

a. Montrer que la suite (v_n) de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$ est une suite arithmético-géométrique.

b. En déduire une expression de u_n.

Exercice 19

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 2} + 2 \end{cases}$

a. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 2$.

b. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n - 2)$.
Justifier que (v_n) est bien définie.

c. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

d. En déduire la formule explicite de u_n.

Exercice 20

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} \end{cases}$

a. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \ln u_n$ est bien définie.

b. Calculer v_n et déduire la valeur de u_n.

Exercice 21

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}} \end{cases}$

a. Vérifier que cette suite est bien définie.

b. Donner une expression explicite de u_n. Comme dans les exercices précédents, on pourra introduire une suite auxiliaire (v_n) bien choisie.

Exercice 22 *(Des suites récurrentes croisées)*

Soient $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_1 = 12 \\ v_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

a. Pour tout entier n strictement positif, on pose : $w_n = v_n - u_n$.
Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. Pour tout entier n strictement positif, on pose : $t_n = 3u_n + 8v_n$.
Démontrer que la suite (t_n) est constante.

c. Exprimer w_n en fonction de n.

d. En déduire une expression explicite de u_n et v_n en fonction de n.

e. Calculer u_2, v_2, u_3 et v_3 à l'aide de la relation de récurrence, puis en utilisant le résultat de la question précédente.

Exercice 23

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+1}{2u_n+4} \end{cases}$

On introduit la suite auxiliaire (t_n) de terme général :

$$t_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1}$$

a. Montrer que (t_n) est une suite géométrique.

b. En déduire une expression de t_n puis de u_n.

Exercice 24

Quatre réels a, b, c et q vérifient :

(i) Les nombres a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q.

(ii) Les nombres a, $2b$ et $3c$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison q.

Déterminer les valeurs possibles de a, b, c et q.

Exercice 25

On cherche à déterminer toutes les suites (u_n) vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 3$$

a. Déterminer deux réels a et b tels que la suite (v_n) définie par $v_n = an + b$ vérifie la relation ci-dessus.

b. Montrer que la suite (z_n) définie par $z_n = u_n - v_n$ est d'un type bien connu, en déduire la valeur de z_n et celle de u_n.

Suites définies à l'aide du symbole $\prod$

Exercice 26

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{k+1} \end{cases}$$

a. Démontrer que : $\forall k \geqslant 2,\ u_k = \left(1 + \dfrac{1}{k}\right) \times u_{k-1}$.

b. Démontrer que : $\forall n \geqslant 2,\ u_n = u_1 \times \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

En déduire la formule explicite de la suite (u_n).

c. Démontrer que : $\forall n \geqslant 2, u_n = n + 1$.

Cette question devra être traitée sans se servir des résultats précédents.

Exercice 27

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)u_k \end{cases}$$

a. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

b. Démontrer que : $\forall k \geqslant 2,\ u_k = (1+k)u_{k-1}$.

c. Calculer $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(\frac{u_k}{u_{k-1}}\right)$.

En déduire la formule explicite de la suite (u_n).

d. Démontrer que : $\forall n \geqslant 2,\ u_n = (n+1)!$

Cette question devra être traitée sans se servir des résultats précédents. On pourra se servir du fait que : $(k+1) = ((k+2) - 1)$

Définition de la convergence

Exercice 28 *Quelques démonstrations du cours ...*

a. On suppose que (u_n) et (v_n) convergent vers 0.
Montrer (avec les ε) que $u_n v_n$ tend vers 0.

b. On suppose que (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers ℓ'.
Montrer que $(u_n - \ell)(v_n - \ell')$ tend vers 0 et en déduire la limite de $u_n v_n$.

c. On suppose $u_n > 0$ (à partir d'un certain rang) et $u_n \to 0$.
Montrer que $1/u_n \to +\infty$.

d. On suppose que $u_n \to +\infty$. Montrer que $1/u_n \to 0$.

Exercice 29
Soit (u_n) une suite convergente vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
On se propose de montrer que $\mathrm{e}^{u_n} \to \mathrm{e}^{\ell}$.

a. Soit $A > 0$. Expliquer pourquoi, à partir d'un certain rang, on a :

$$-A \leqslant u_n - \ell \leqslant A$$

b. En déduire qu'à partir d'un certain rang, on a :

$$-\mathrm{e}^A + 1 \leqslant \mathrm{e}^{u_n - \ell} - 1 \leqslant \mathrm{e}^A - 1$$

c. En déduire que la suite $(1 - \mathrm{e}^{u_n - \ell})$ tend vers 0.

d. Conclure.

Exercice 30
Soit (u_n) une suite à termes entiers relatifs. On suppose que (u_n) est convergente.

1. Montrer que la limite de la suite (u_n) appartient nécessairement à $\mathbb{Z}$.

2. Montrer que la suite (u_n) est stationnaire.

Exercice 31 *Vrai ou Faux ?*

a. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors (u_n) n'est pas majorée.

b. Une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.

c. Si $(|u_n|)$ converge alors (u_n) converge.

d. Si $(|u_n|)$ tend vers 0 alors (u_n) tend vers 0.

e. Une suite convergente est monotone à partir d'un certain rang.

f. Une suite convergente et majorée est croissante.

g. Une suite divergeant vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.

h. Une suite strictement croissante diverge vers $+\infty$.

i. Une suite strictement décroissante diverge vers $-\infty$.

j. Si (u_n) est croissante et $u_n \leqslant v_n$ alors (v_n) est croissante.

k. Si (u_n) tend vers 0 et (v_n) tend vers $+\infty$, alors on ne peut conclure sur la limite du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$ (*F.I.*).

l. Si (u_n) est divergente, alors la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n$ est divergente.

m. Si (u_n) tend vers $\ell \neq 0$ alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Exercice 32
Soit (u_n) une suite telle que :

× $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$,

× $(u_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Montrer que (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 33

Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers ℓ_1.

Soit (v_n) une suite réelle convergeant vers ℓ_2.

Démontrer que les suites $\big(\max(u_n, v_n)\big)$ et $\big(\min(u_n, v_n)\big)$ sont convergentes et calculer leurs limites.

Exercice 34

Soit (u_n) une suite réelle. On pose :

$$A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

1. On suppose que (u_n) diverge vers $+\infty$. Démontrer que A admet un plus petit élément.

2. On suppose que (u_n) converge. Démontrer que A admet un plus petit ou un plus grand élément.

Exercice 35 *(Théorème de Césaro)*

Soit (u_n) une suite complexe.

On note (c_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$$

On nomme cette suite *moyenne de Césaro* de la suite (u_n).

1. On suppose dans cette question que la suite (u_n) est convergente. Il existe donc $\ell \in \mathbb{C}$ telle que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

On souhaite démontrer : $c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

a) Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_1, \quad |c_n - \ell| \leqslant \frac{|u_1 - \ell| + \cdots + |u_{N_0-1} - \ell|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

b) En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad |c_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Conclure.

2. Réciproquement, on suppose que la suite (c_n) est convergente. Peut-on en déduire que (u_n) est convergente ?

3. Que dire si (u_n) est une suite réelle divergeant vers $+\infty$.

Exercice 36 *(Applications du théorème de Césaro)*

Dans cet exercice, on pourra utiliser librement le résultat de la question *1.* de l'exercice 35.

1. Soit (u_n) une suite complexe telle que : $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}$. Démontrer :

$$\frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

2. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell > 0$. Démontrer :

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} u_k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Exercice 37 *(Autour de Césaro)*

Soit (u_n) une suite complexe telle que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}$.

1. On définit une suite (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{u_1 + 2\,u_2 + \cdots + n\,u_n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k\,u_k$$

Démontrer : $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{2}$.

2. On définit une suite (w_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n \ = \ \frac{\binom{n}{0} u_0 + \binom{n}{1} u_1 + \cdots + \binom{n}{n} u_n}{2^n} \ = \ \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u_k$$

Démontrer : $w_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exercice 38

Soient (u_n) et (v_n) deux suites complexes convergeant vers 0.
On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} |u_k| \ \leqslant \ M$$

Démontrer : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \, v_{n-k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Calculs de limites

Exercice 39

a. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 - 3n^7 + 5n - n^3}{n^2 + 1}$

b. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(-1)^n \ n^2 + 3n}{n^2 + \sqrt{n}}$

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} + 2}{\mathrm{e}^{\ln n + 3} - 5}$

d. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 \mathrm{e}^n - n\mathrm{e}^{2n}}{n^3 \ln n - n \, (\ln n)^3}$

e. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(\ln n)^2 + 3n + 1}{\ln n + 5}$

f. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^3 - 5n\sqrt{n} + n - \ln n + n^{-1}}{\mathrm{e}^{3n} - \mathrm{e}^n + 1 - \mathrm{e}^{-n}}$

g. $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n^2 + 2} - n$

h. $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + n}$

i. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$

j. $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n \ \mathrm{e}^{-3n}$

k. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^n}{n!}$

Exercice 40

a. $\lim\limits_{n \to +\infty} (2^{\frac{1}{n}} + 5^{\frac{1}{n}})^n$

b. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + n^2\right)^{1/n}$

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} (\mathrm{e}^n + \sqrt{2})^{\frac{1}{n^2}}$

d. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(1 + \mathrm{e}^{n^2})^{\frac{1}{n}}}{n \ \ln n - \sqrt{n}}$

Exercice 41

a. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

b. $\lim\limits_{n \to +\infty} n\sqrt{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2 + 1}\right)}$

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} (2n - 3) \ln\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)$

d. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

Exercice 42

a. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sin(n^3)}{n}$

b. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^3 + 5n}{5n^3 + \cos(n) + \frac{1}{n^2}}$

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$

d. $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{3 + \sin(n)}$

e. $\lim\limits_{n \to +\infty} \arctan\left(\dfrac{n^2 - n \ \cos(n) + (-1)^n}{\ln(n) + n^2}\right)$

f. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(5 \ \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) + \dfrac{1}{5} \ \cos(n)\right)^n$

g. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \lfloor k \, x \rfloor$

h. $\lim\limits_{n \to +\infty} n + (-1)^n \sqrt{n}$

Exercice 43

Soit (u_n) une suite réelle positive. Supposons que la suite $\left(\frac{u_n}{1+u_n}\right)$ converge vers 0.
Démontrer que (u_n) converge vers 0.

Exercice 44

Soit (u_n) une suite réelle bornée. Supposons que la suite $\left(\frac{u_n}{1+u_n^2}\right)$ converge vers 0. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0. Que peut-on dire si on ne suppose plus (u_n) bornée ?

Exercice 45

Le but de l'exercice est de trouver la limite, lorsque $n \to +\infty$, de la quantité :

$$u_n = \frac{n^{\ln n} + (\ln n)^{n \ln n}}{e^{n^2}}$$

a. Rappeler la définition de $w_n = n^{\ln n}$ et de $z_n = (\ln n)^{n \ln n}$.

b. On note $t_n = n \times (\ln n) \times (\ln(\ln n)) - (\ln n)^2$.

Factoriser t_n par son terme dominant et en déduire la limite de t_n.

c. En déduire que $\dfrac{w_n}{z_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Factoriser alors la quantité $a_n = n^{\ln n} + (\ln n)^{n \ln n}$ par son terme dominant.

d. Factoriser enfin u_n par son terme dominant.

e. Factoriser alors la quantité $s_n = n^2 - n \times (\ln n) \times (\ln(\ln n))$ par son terme dominant.

f. En utilisant le fait que : $\forall n \geqslant 3,\ 1 \leqslant \ln n \leqslant n$, démontrer que :

$$\forall n \geqslant 3,\ 0 \leqslant \frac{\ln(\ln n)}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

g. Conclure.

Exercice 46

Suites extraites

Exercice 47

Montrer que les suites suivantes sont divergentes.

a) $\left(\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)\right)$ | ***b)*** $\left(\dfrac{5n^2 + \sin(n)}{2\,(n+1)^2 \cos\left(\frac{n\pi}{5}\right)}\right)$ | ***c)*** $\left(\dfrac{2 + n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right)}\right)$

Exercice 48

1. Soit (u_n) une suite réelle prenant un nombre fini de valeurs. Montrer que l'on peut en extraire une suite constante.

2. Soit (u_n) une suite réelle qui ne diverge pas vers $+\infty$. Montrer que l'on peut en extraire une suite majorée.

3. Soit (u_n) une suite complexe. Soit $\ell \in \mathbb{C}$.

a) Démontrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe une suite extraite de (u_n) qui converge vers ℓ.

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble A_ε défini ci-après est infini.

$$A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} \mid |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon\}$$

b) Donner un exemple d'une suite non convergente vérifiant cette propriété.

4. Montrer que, de toute suite réelle divergeant vers $+\infty$, on peut extraire une suite croissante.

Exercice 49

1. Soit (u_n) une suite réelle croissante. On suppose que (u_n) admet une suite extraite convergente. Démontrer que la suite (u_n) converge.

2. Démontrer que si les suites extraites (u_{3n}), (u_{3n+1}) et (u_{3n+2}) convergent vers le même complexe ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.

3. On suppose qu'il existe un réel ℓ tel que pour tout $k \in [\![2, +\infty[\![$, la suite $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Peut-on en déduire la convergence de la suite (u_n) ?

Théorème de convergence monotone / d'encadrement

Exercice 50

Soit la suite définie par $u_n = \dfrac{5^n}{n!}$ pour tout $n \geqslant 0$.

a. Calculer les cinq premiers termes. La suite (u_n) semble-t-elle monotone ?

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir de $n = 4$.

c. Montrer que pour $n \geqslant 5$, $u_{n+1} \leqslant \dfrac{5}{6}\, u_n$.

d. Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_5 = u_5$ et de raison $\dfrac{5}{6}$. Montrer que pour tout $n \geqslant 5$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

e. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 51

On considère la suite (S_n) définie pour $n \geqslant 1$ par : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

a. Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

b. En déduire la limite de la suite (S_n).

c. On pose $T_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Démontrer à l'aide du théorème de convergence monotone que (T_n) converge.

d. Exhiber alors une suite (u_n) tel que : $\dfrac{S_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 52

Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$.

Calculer sa limite.

Exercice 53

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

a. Montrer que la suite est bien définie et à termes strictement positifs.

b. En déduire que (u_n) est monotone.

c. Pour tout k de $\mathbb{N}$, exprimer ${u_{k+1}}^2 - {u_k}^2$ en fonction de ${u_k}^2$.

d. En déduire que pour tout $n > 0$, on a :

$$ {u_n}^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{{u_k}^2} $$

e. En déduire que pour n non nul, ${u_n}^2 \geqslant 2n + 1$ puis la limite de (u_n).

Exercice 54

a. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n!} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

b. Démontrer que la suite (S_n) de terme général $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ converge vers un réel $\ell \in]2, 3]$.

Exercice 55

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe un rang n_0 à partir duquel : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

a. Montrer que si $u_n \to +\infty$ alors $v_n \to +\infty$.

b. Montrer que si $v_n \to 0$ alors $u_n \to 0$.

Suites implicites

Exercice 56

On considère les fonctions $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in]0, 1[$.
On s'intéresse maintenant à la suite (x_n).

b. Démontrer que, pour tout $n > 0$: $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$.
En déduire que : $\forall n > 0,\ x_n < x_{n+1}$.

c. Démontrer que (x_n) converge et que sa limite ℓ est telle que $0 < \ell \leqslant 1$.

d. Démontrer que : $\forall n > 0,\ x_n \leqslant \ell$.

e. En procédant par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.

Exercice 57

Pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$, on définit la fonction $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par :

$$f_n : x \mapsto x^n - nx + 1$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution. On la note u_n.

2. Pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$, déterminer le signe de $f_{n+1}(u_n) - f(u_n)$. En déduire que (u_n) est monotone.

3. Démontrer que la suite (u_n) converge vers 0.

4. Démontrer : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 58

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. On considère $a \in \mathbb{R}$, et la suite (u_n) vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On suppose enfin que $u_1 \geqslant u_0$.

1. On suppose f croissante.

- ***a.*** Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.
- ***b.*** Sous quelle condition (u_n) est-elle convergente ?
- ***c.*** Supposons que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
  Donner une équation vérifiée par ℓ.

2. On suppose maintenant f décroissante.

- ***a.*** Quelle est la monotonie de la suite (u_{2n}) ?
- ***b.*** Quelle est la monotonie de la suite (u_{2n+1}) ?

3. On suppose enfin que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant x$.
Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4. **Application.** On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(2u_n + 1) \end{cases}$$

- ***a.*** À l'aide de quelle fonction f peut-on écrire $u_{n+1} = f(u_n)$?
  Faire l'étude de cette fonction.
- ***b.*** Montrer que (u_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
- ***c.*** Étudier le sens de variation de (u_n).
- ***d.*** En déduire que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $1 \leqslant \ell \leqslant 2$.

Exercice 59

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{2 + u_n} \end{cases}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Exercice 60

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \exp(u_n) - 1 \end{cases}$

On note f la fonction définie par : $f(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

a. Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution qui est 0.
Déterminer le signe de $f(x) - x$. Préciser le sens de variations de f.

On suppose maintenant que $u_0 = 1$.

b. Montrer que pour tout entier n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$.

c. Montrer que (u_n) n'est pas majorée et en déduire sa limite.

d. Monter que si $x \geqslant 1$ alors $f(x) \geqslant (\mathrm{e} - 1)x$.

e. En déduire que pour tout entier n, $u_n \geqslant (\mathrm{e} - 1)^n$ et retrouver la limite de la suite.

On suppose maintenant que $u_0 < 0$.

f. Montrer que pour tout entier n, $u_n < 0$.

g. En déduire que (u_n) est croissante puis qu'elle converge vers 0.

Exercice 61

Étudier les suites (u_n) définies ci-dessous.

1. $\begin{cases} u_0 \geqslant 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2\ \ln(1 + u_n) \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n\,(1 - u_n) \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_0 \geqslant 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2 + u_n} \end{cases}$

Exercice 62

Soit $a > 0$. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f : x \mapsto a\ \frac{1 + a^2}{1 + x^2}$$

Soit $\alpha \geqslant 0$. On note (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence éventuelle de la suite (u_n).

1. a) Étudier la monotonie de f ainsi que la position de son graphe par rapport à la première bissectrice. On montrera en particulier que $x \in \mathbb{R}_+$ est un point fixe de f si et seulement s'il est racine du polynôme P défini par :

$$P(X) \ = \ (X - a)\left(X^2 + aX + (1 + a^2)\right)$$

b) Tracer sur le même dessin le graphe de f ainsi que la première bissectrice.

2. a) Étudier la monotonie de $f \circ f$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer que x est un point fixe de $f \circ f$ si et seulement s'il est racine du polynôme Q défini par :

$$Q(X) \ = \ (X - a)\left(X^2 + aX + (1 + a^2)\right)\left(X^2 - a\,(1 + a^2)\,X + 1\right)$$

c) Étudier la position du graphe de $f \circ f$ par rapport à la première bissectrice en discutant selon les valeurs de a. Dans les différents cas, on tracera le graphe de $f \circ f$ ainsi que la première bissectrice.

Dans la suite de l'exercice, on définit la suite (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{2n}$$

On remarquera que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = (f \circ f)(v_n)$.

3. Montrer que la suite (v_n) est monotone et bornée.

4. On suppose dans cette question : $a \leqslant 1$.

a) Montrer que (v_n) converge et déterminer sa limite.

b) Qu'en déduire pour la suite (u_n) ?

5. Dans cette question, on suppose : $a > 1$.

a) Si $\alpha < a$, démontrer que (v_n) converge vers un réel α strictement inférieur à a. En déduire que la suite (u_n) diverge.

b) Que dire si $u_0 > a$? Si $u_0 = a$?

Exercice 63

On définit une suite réelle (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 \in \,]0,1[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2} \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite (u_n) converge vers 1.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{1 - u_n}$. Démontrer que la suite $(v_{n+1} - v_n)$ converge vers $\dfrac{1}{2}$.

3. Démontrer, en utilisant le théorème démontré en question ***1.*** de l'exercice 35 :

$$1 - u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$

Suites adjacentes

Exercice 64

On considère la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Démontrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
En déduire que la suite (S_n) converge.

Exercice 65

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n\,n!}$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

Exercice 66

Soient (u_n) et (v_n) définies par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 3 & \text{et} \quad v_0 = 11 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + v_n}{4} & \text{et} \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

a. Étudier la suite $(v_n - u_n)$. Calculer son terme général en fonction de n, quel est son signe ? Donner sa limite.

b. Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
Que peut-on en déduire ?

c. Étudier la suite $(u_n + v_n)$. Que conclure ?

Exercice 67

Soit a et b deux réels positifs. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a \ \texttt{ET} \ v_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n\, v_n} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. *a)* Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies, puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant v_n$$

b) En déduire la monotonie des suites (u_n) et (v_n).

c) Démontrer que (u_n) et $v_n)$ sont convergentes et ont même limite que l'on note $M(a, b)$.

2. *a)* Calculer $M(0, 1)$ et $M(1, 1)$.

b) Démontrer, pour tout $(x, y) \in \left(\mathbb{R}_+\right)^2$:

$$x \leqslant y \quad \Rightarrow \quad M(1, x) \leqslant M(1, y)$$

Exercice 68 *(e est irrationnel)*

Le but de cet exercice est de montrer que e est un nombre irrationnel.

1. On note (u_n) et (v_n) les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n \ = \ u_n + \frac{1}{n\, n!}$$

a) Déterminer le sens de monotonie de (u_n) et (v_n).

b) En déduire qu'elles convergent vers une limite commune. On la note ℓ.

c) Supposons que ℓ est rationnel. Il existe alors $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que : $\ell = \frac{p}{q}$. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \ < \ \frac{p}{q} \ < \ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n\, n!}$$

d) Conclure à une absurdité en choisissant $n = q$.

2. Le but de cette question est de démontrer : $\ell = \mathrm{e}$.

a) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{e} \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\ \mathrm{e}^t\ dt$$

b) Démontrer :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\ dt \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

c) Conclure.

Exercice 69

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par leur premier terme $(u_0, v_0) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \ = \ \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} \ = \ \frac{2\, u_n\, v_n}{u_n + v_n}$$

1. Montrer que cette définition est licite puis : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant v_n$.

2. Montrer que (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang et que (v_n) est croissante à partir d'un certain rang.

3. *a)* Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - v_{n+1} \ \leqslant \ \frac{u_n - v_n}{2}$$

b) En déduire, à l'aide des questions précédentes, que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $u_n\, v_n$.

5. En déduire les limites de (u_n) et (v_n).