# Intégrations et primitives

## Calcul de primitives à vue

### Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes.

**a.** $\displaystyle\int_2^3 (t^2+t+1)\ dt$

**b.** $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^5 \frac{1}{1-2t}\ dt$

**c.** $\displaystyle\int_0^2 \left(2x+1+\frac{3}{2t+3}\right)\ dt$

**d.** $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \left(5+4\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{2t}\right)\ dt$

**e.** $\displaystyle\int_1^0 \mathrm{e}^{2t}\ dt$

**f.** $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{t}{t+1}\ dt$

### Exercice 2

Donner une primitive des fonctions suivantes.
On précisera l'ensemble de définition.

**a.** $f(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}$

**b.** $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$

**c.** $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}$

**d.** $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$

**e.** $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

**f.** $f(x)=\dfrac{1}{x}(\ln x)^2$

### Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

**a.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(2x+1)^2}\ dx$

**b.** $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{14}{(4-x)^3}\ dx$

**c.** $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^2 \frac{\ln x}{x}\ dx$

**d.** $\displaystyle\int_{1/\mathrm{e}^3}^{1/\mathrm{e}^2} \frac{dx}{x\ln x}$

**e.** $\displaystyle\int_3^4 \frac{x-1}{x^2}\ dx$

**f.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x}\ dx$

**g.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+4x}}$

**h.** $\displaystyle\int_1^{1/\ln 2} 2^x\ dx$

**i.** $\displaystyle\int_2^1 \mathrm{e}^x\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)\ dx$

**j.** $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{x^2+1}\ dx$

**k.** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(\ln x)^2}{x}\ dx$

**l.** $\displaystyle\int_0^1 3\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}+1}\ dx$

**m.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}\ dx$

**n.** $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

**o.** $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{1-x^3}\ dx$

**p.** $\displaystyle\int_0^3 (5^x-x+4)\ dx$

**q.** $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 (x-1)\left(\frac{x^2}{2}-x+3\right)\ dx$

## Primitives de fonctions rationnelles par DES

### Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes.

***a.*** $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t+1}\,dt$

***b.*** $\displaystyle\int_1^0 \frac{1}{t^2-4}\,dt$

***c.*** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+t-2}\,dt$

***d.*** $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t+5}{(t+1)^2}\,dt$

***e.*** $\displaystyle\int_3^4 \frac{4}{t(t^2-4)}\,dt$

***f.*** $\displaystyle\int_3^5 \frac{dt}{(t+1)(t-2)}$

***g.*** $\displaystyle\int_0^1 \frac{-6t^2+t+5}{2t+1}\,dt$

***h.*** $\displaystyle\int_1^0 \frac{-3t^2-t+18}{t^2-4}\,dt$

## Calcul de primitives par IPP

### Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes.

***a.*** $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,dx$

***b.*** $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\,dx$

***c.*** $\displaystyle\int_2^3 (\sqrt{x}+\ln x)\,dx$

***d.*** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (x-\mathrm{e})\,\ln x\,dx$

***e.*** $\displaystyle\int_0^1 x^3\mathrm{e}^{x^2}\,dx$

***f.*** $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$

***g.*** $\displaystyle\int_0^2 (2-x)\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$

***h.*** $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\mathrm{e}^x\,dx$

***i.*** $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$

***j.*** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\,dx$

## Calcul de primitives par changement de variable

### Exercice 6

Calculer les intégrales suivantes.

***a.*** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\mathrm{e}^x+1}$ $\left(\begin{array}{l}\text{Changement de variable : } u=\mathrm{e}^x\\ \textit{i.e.}\quad \varphi : u\mapsto \ln u\end{array}\right)$

***b.*** $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x}}$ $\left(\begin{array}{l}\text{Changement de variable : } u=\sqrt{x}\\ \textit{i.e.}\quad \varphi : u\mapsto u^2\end{array}\right)$

***c.*** $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}dx$ $\left(\begin{array}{l}\text{Changement de variable : } u=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\\ \textit{i.e.}\quad \varphi : u\mapsto (\ln u)^2\end{array}\right)$

***d.*** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$ $\left(\begin{array}{l}\text{Changement de variable : } u=\sqrt{1+\mathrm{e}^x}\\ \textit{i.e.}\quad \varphi : u\mapsto \ln(u^2-1)\end{array}\right)$

***e.*** $\displaystyle\int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}\,dx$ $\left(\begin{array}{l}\text{Changement de variable : } u=\sqrt{x^3+1}\\ \textit{i.e.}\quad \varphi : u\mapsto (u^2-1)^{\frac{1}{3}}\end{array}\right)$

***f.*** $\displaystyle\int_8^{27} \frac{1}{1+\sqrt{x^3}}\,dx$ $\left(\begin{array}{l}\text{Changement de variable : } u=\sqrt[3]{x}\\ \textit{i.e.}\quad \varphi : u\mapsto u^3\end{array}\right)$

***g.*** $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$ $\left(\begin{array}{l}\text{Changement de variable : } u=\sqrt{x}\\ \textit{i.e.}\quad \varphi : u\mapsto u^2\end{array}\right)$

### Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes par changement de variable.
*(changement non précisé !)*

***a.*** $\displaystyle\int_3^4 \frac{t}{\sqrt{t-2}}\,dt$

***b.*** $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{t\sqrt{2t+1}}\,dt$

***c.*** $\displaystyle\int_2^3 \ln(\sqrt[3]{t}-1)\,dt$

***d.*** $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t\sqrt{t+1}}$

## Miscellanées sur les calculs de primitives

### Exercice 8

Calculer les primitives suivantes.

***a)*** $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$

***b)*** $\begin{array}{ccc} ]0,1[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x\,\ln(x)} \end{array}$

***c)*** $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos^2(x)\,\sin^4(x) \end{array}$

***d)*** $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos^2(x)\,\sin^5(x) \end{array}$

***e)*** $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x)\,\mathrm{ch}(3x)\,\mathrm{e}^{-x} \end{array}$

***f)*** $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x}\left(\sqrt{3}\,\cos(2x) - \sin(2x)\right) \end{array}$

***g)*** $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x^2+x)\,\cos(x) \end{array}$

***h)*** $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\,\mathrm{e}^{x}\,\cos(3x) \end{array}$

***i)*** $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x) \end{array}$

***j)*** $\begin{array}{ccc} ]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1-2x}{\sqrt{1-4x^2}} \end{array}$

***k)*** $\begin{array}{ccc} ]-1,1[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3\sqrt{1-x^4} \end{array}$

***l)*** $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \end{array}$

***m)*** $\begin{array}{ccc} ]1,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2+x+1}{x-1} \end{array}$

***n)*** $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^3-x+1}{x^2+x+1} \end{array}$

***o)*** $\begin{array}{ccc} ]\frac{3}{2},+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2+1}{\sqrt{2x-3}} \end{array}$

***p)*** $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{4x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} \end{array}$

### Exercice 9

En faisant les changements de variables indiqués, calculer les primitives des fonctions suivantes.

***1.*** $\begin{array}{ccc} ]0,\frac{\pi}{3}[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(3x)} \end{array}$ et poser $t=\cos(x)$.

***2.*** $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2\,\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x)+1} \end{array}$ et poser $t=\mathrm{e}^x$.

***3.*** $\begin{array}{ccc} ]2,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x+\sqrt{x-2}} \end{array}$ et poser $t=\sqrt{x-2}$

***4.*** $\begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{3\,\sin(x)+1} \end{array}$ et poser $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

***5.*** $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\cos^3(x)\,\sin^3(x)}{1+\sin^2(x)} \end{array}$ et poser $t=\cos(2x)$.

### Exercice 10

Soit $\varepsilon \in \{-1,1\}$. On considère la fonction $f : t \mapsto \sqrt{1+\varepsilon\,t^2}$.

***1.*** À l'aide du changement de variable $t=\sin(u)$, trouver une primitive de $f$ considérée sur $]-1,1[$ lorsque $\varepsilon=-1$.

***2.*** À l'aide du changement de variable $t=\mathrm{sh}(u)$, trouver une primitive de $f$ considérée sur $\mathbb{R}$ lorsque $\varepsilon=1$.

***3.*** À l'aide d'une intégration par parties judicieuse, retrouver les résultats des questions précédentes.

**Exercice 11**
Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $F_p$ la primitive de $x \mapsto (1+x^2)^{-p}$, définie sur $\mathbb{R}$, qui s'annule en 0.

*1.* Déterminer $F_1$.

*2.* Démontrer, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$F_{p+1}(x) = \frac{x}{2p\,(1+x^2)^p} + \frac{2p-1}{2p}\ F_p(x)$$

*3.* Application : calculer une primitive de chacune des deux fonctions suivantes (pour la seconde, on pourra utiliser le changement de variable $t = \tan(x)$).

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{(x^2+x+1)^3} \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} [0, \frac{\pi}{4}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sin^4(x)+\sin^2(x)+\frac{1}{4}} \end{array}$$

## Suite d'intégrales

**Exercice 12**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pn note $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x \, dx$.

***a.*** À l'aide d'un raisonnement par encadrement, montrer que : $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

***b.*** Montrer que pour tout entier $n > 0$ on a $I_n = \dfrac{e}{n+1} - \dfrac{1}{n+1} I_{n+1}$.

***c.*** Montrer que : $n\ I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e$.

**Exercice 13**
On note $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \, dx$.

***a.*** À l'aide d'un raisonnement par encadrement, montrer que : $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

***b.*** Montrer que $I_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.

***c.*** En déduire que $e = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

**Exercice 14**
On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout entier $n$ strictement positif par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} \, dx$$

*1.* Calculer le premier terme $u_1$ de la suite.

*2.* Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels positifs.

*3.* Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante.

*4.* Montrer que l'on a, pour tout entier $n$ strictement positif : $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n}$.

*5.* En déduire une fonction **Python** qui prend un entier $n$ strictement positif et qui renvoie $u_n$, le $n$-ième terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

*6.* Établir, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, la double inégalité :

$$\frac{1}{n} \leqslant 2u_n \leqslant \frac{1}{n-1}$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

*7.* À l'aide de l'inégalité précédente, trouver un équivalent simple de $u_n$.

**Exercice 15.** *Intégrales de Wallis*
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n$ et $J_n$ par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, dt \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt$$

*1.* Démontrer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ : $I_n = J_n$.

*2.* Montrer que les suites $(I_n)$ et $(J_n)$ sont positives et décroissantes.

*3.* Calculer $I_0$ et $I_1$.

*4.* Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, I_n$$

*5.* En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$I_n\, I_{n+1} = \frac{\pi}{2\,(n+1)}$$

*6.* En déduire :

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

c'est-à-dire que la suite $\left(I_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}}\right)$ converge vers 1.

**Exercice 16**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\, dx$$

*1.* Établir une relation de récurrence entre $I_n$ et $I_{n+1}$.

*2.* Calculer $I_n$.

*3.* En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$.

# Équations différentielles linéaires d'ordre 1

**Exercice 17**
Résoudre les équations différentielles suivantes.

*a)* $y' = y + 1$

*b)* $y' = 3y + \mathrm{e}^{3x}$

*c)* $y' = 2y + \mathrm{e}^{2x}\,(1+x)$

*d)* $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$

*e)* $y' = -y + x\,\mathrm{e}^{x}$

*f)* $y' = 2y + 2x^2 - 1$

*g)* $y = \dfrac{y}{x^2}$

*h)* $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}\; y = \dfrac{1+3x^2}{1+x^2}$

*i)* $y' - \ln(x)\, y = x^x$

*j)* $(x-1)\, y' + x\, y = \sin(x)$

*k)* $(1+x)\, y' + y = 1 + \ln(1+x)$

*l)* $x\,(x-1)\, y' - (3x-1)\, y + x^2\,(x+1) = 0$

*m)* $y' + y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$

**Exercice 18**
Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

*1.* $\begin{cases} y' + 2y = 3 \\ y(0) = 10 \end{cases}$

*2.* $\begin{cases} y' - y = t^2 + 1 \\ y(0) = -3 \end{cases}$

*3.* $\begin{cases} y' + y = t\,\mathrm{e}^t \\ y(1) = -1 \end{cases}$

**Exercice 19.** *Lemme de Gronwall*
Soient $c \in [0, +\infty[$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive. Soit $u : I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in [a,b[, \quad \left|u(x)\right| \leqslant c + \int_a^x \left|u(t)\right| g(t)\, dt$$

*1.* On pose $v : x \mapsto c + \displaystyle\int_a^x \left|u(t)\right| g(t)\, dt$ et $w : x \mapsto v(x) \exp\left(-\displaystyle\int_a^x g(t)\, dt\right)$.
Montrer que $w$ est décroissante sur $I$.

*2.* En déduire : $\forall x \in [a,b]$, $\left|u(x)\right| \leqslant c \exp\left(\displaystyle\int_a^x g(t)\, dt\right)$.

**Exercice 20**
Résoudre, sur $]0,1[$, l'équation différentielle :

$$(1-x^2)\,y' + x\,y = \frac{1}{x} + x\,\ln(x) - x$$

**Exercice 21**
Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x f(t)\,(2x-3t)\;dt \;=\; \frac{x^2}{2}$$

**Exercice 22**
Déterminer les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$f'(x) + f(x) + \int_0^1 f(t)\;dt \;=\; 0$$

## Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

**Exercice 23**
Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' - 3y' + 2y = 2\,\mathrm{e}^{3x}$
2. $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{x}$
3. $y'' - 3y' + 2y = 2\,\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{x}$
4. $y'' + 4y' + 4y = 2$
5. $y'' - 2y' + y = x\,\mathrm{e}^{x}$
6. $y'' + y' - 2y = \mathrm{ch}(x)$
7. $y'' - y = |x| + 1$
8. $y'' - 2y' + 2y = 8\,\sin(2x)$
9. $y'' + y = \sin^3(x)$
10. $y'' - 4y' + 4y = x\,\mathrm{ch}(2x)$

**Exercice 24**
Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y \;=\; 0 \\ y(-1) = 1 \\ y'(-1) = 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y'' - 2y \;=\; \mathrm{e}^{t} \\ y(0) = -3 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y'' - 6y' + 3y \;=\; t\mathrm{e}^{3t} \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} y'' + y \;=\; 3\,x^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

**Exercice 25**
Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)\,f(y) \;=\; \int_{x-y}^{x+y} f(t)\;dt$$

**Exercice 26**
On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$(1+x)\,y'' - y' - xy \;=\; 0 \qquad (E)$$

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{x}$ est solution.
2. Soit $y$ une solution de $(E)$. Déterminer les fonctions $z : x \mapsto y(x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
3. Conclure.

**Exercice 27.** *Équation d'Euler*
On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad t^2\,y'' - t\,y' + y \;=\; 0$$

*1.* Dans cette question, on souhaite résoudre $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
*a)* En posant $z : u \mapsto y(\mathrm{e}^u)$, montrer que $y$ est solution de $(E)$ si et seulement si $z$ est solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants que l'on précisera.
*b)* En déduire l'ensemble des solutions de $(E)$.
*2.* Résoudre $(E)$ sur $\mathbb{R}_-^*$ puis sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 28.** *Changements de variable*

*1.* En posant $x = \tan(t)$, résoudre l'équation différentielle :

$$(1+x^2)^2\,y'' + 2x\,(1+x^2)\,y' + 4\,y \;=\; 0$$

*2.* Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. En posant $x = \mathrm{sh}(t)$, résoudre l'équation différentielle :

$$(1+x^2)\,y'' + x\,y' - \alpha^2\,y \;=\; 0$$

*3.* En posant $t = \sqrt{x}$, résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$4x\,y'' + 2\,y' - y \;=\; 0$$

**Exercice 29**
Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique dirigé suivant l'axe $(Oz)$ est régi par un système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} x'' &=& \omega\,y' \\ y'' &=& -\omega\,x' \\ z'' &=& 0 \end{cases}$$

où $\omega$ est une constante dépendant de la masse, de la charge de la particule et du champ magnétique.
En considérant $u = x' + iy'$, résoudre ce système différentiel.

# Équations fonctionnelles

**Exercice 30**
Soit $f$ une fonction réelle à valeurs réelles deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}$ :

$$f(x+y) + f(x-y) \;=\; 2\,f(x)\,f(y)$$

*1.* On commence par étudier la fonction $f$.
*a)* Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.
*b)* Montrer que si $f(0) = 0$, la fonction $f$ est la fonction identiquement nulle.
*c)* Montrer que $f$ est paire et : $f'(0) = 0$.
*2.* Démontrer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$f''(x)\,f(y) \;=\; f(x)\,f''(y)$$

*3.* En déduire que $f$ est soit nulle, soit solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
*4.* Déterminer l'ensemble des fonctions $f$ satisfaisant l'équation fonctionnelle.

**Exercice 31**
On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(xy) \;=\; x\,f(y) + y\,f(x)$$

Dans toute la suite, $f$ désigne une fonction de $\mathcal{E}$.
*1.* *a)* Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.
*b)* Démontrer que la fonction $f$ est impaire.
*2.* On suppose que la fonction $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.
*a)* Montrer que $f$ est solution, sur l'intervalle $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle :

$$x\,f'(x) - f(x) \;=\; k\,x$$

où $k$ est une constante réelle dépendant de $f$ que l'on précisera.

*b)* Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle précédente.

*c)* En déduire, en fonction de la constante $k$, la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

*d)* La fonction $f$ est-elle dérivable en $0$ ?

*3.* On note $F$ la primitive de $f$ qui s'annule en 0.

*a)* Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$F(xy) \;=\; x^2\, F(y) + \frac{x\,y^2}{2}\; f(x)$$

*b)* En déduire que la fonction $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

*4.* Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$.

## Équations différentielles non linéaires

**Exercice 32**

Soit $(a,b) \in\, ]0,+\infty[^2$. On considère l'équation différentielle logistique (non linéaire) :

$$y' \;=\; ay - by^2 \qquad (E)$$

*1.* Déterminer les équilibres de l'équation logistique.

*2.* Soit $f$ une solution de $(E)$ sur $[0,+\infty[$ qui ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$.

*a)* On pose $z = \dfrac{1}{f}$. Montrer que $z$ satisfait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, notée $(E')$.

*b)* Résoudre $(E')$.

*c)* Conclure quant à l'ensemble des solutions de $(E)$ ne s'annulant pas sur $I$.

*3.* Soit $f$ une solution de $(E)$ sur $[0,+\infty[$ qui ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. Que remarque-t-on ?

**Exercice 33**

On considère l'équation différentielle :

$$x\,y' - x\,\mathrm{e}^{-\frac{y}{x}} - y \;=\; 0 \qquad (E)$$

Résoudre cette équation différentielle à l'aide du changement de variable $z : x \mapsto \dfrac{1}{x}\; y(x)$.

**Exercice 34**

*1.* Déterminer les fonctions dérivables $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) \;=\; \mathrm{e}^x\, f(y) + f(x)\,\mathrm{e}^y$$

*2.* Déterminer les fonctions dérivables $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(0) \neq 0$ et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) \;=\; f(x)\, f'(y) + f'(x)\, f(y)$$

**Exercice 35**

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \;=\; f(2-x)$$

**Exercice 36**

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + \int_0^x (x-t)\, f(t)\; dt \;=\; 1$$

**Exercice 37**

On considère l'équation différentielle : $y' = 1 + y^2$.

*1.* Trouver une solution particulière de cette équation sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

*2.* Soient $a < b$ deux réels, $I = ]a,b[$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation. On définit $g : \begin{array}{ccc} I & \to & ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \\ x & \mapsto & \arctan\big(f(x)\big) \end{array}$. Démontrer que $g$ est dérivable sur $I$ et déterminer $g'$.

*3.* En déduire l'ensemble des solutions de l'équation sur l'intervalle $]a,b[$.

*4.* Montrer que l'équation possède une unique solution sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.