Écriture d'un complexe

Exercice 1
Écrire sous forme algébrique les nombres suivants :

a) $\dfrac{2+3i}{4-i}$

b) $\dfrac{(1-i)^3}{2+i}$

c) $\dfrac{(2+i)^3}{(1+2i)^2}$

d) $\left((1+i)^2+2-i\right)^5$

Exercice 2
Pour chaque complexe z qui suit, déterminer $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $z=a+bj$.

a) $(2+3j-j^2)^3$ *b)* $\dfrac{(1-j)^4}{2+j}$ *c)* $\dfrac{(2+j^2)^2}{(1+j)^7}$

Exercice 3
Soit a un nombre complexe de module 1.
Donner le module et un argument de $a+i\bar{a}$ en fonction d'un argument de a.

Exercice 4
1. Écrire sous forme trigonométrique les complexes $-1-i$, $1-i\sqrt{3}$ et leur produit.
2. En déduire les valeurs exactes de $\sin\left(\dfrac{11\,\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{11\,\pi}{12}\right)$.

Exercice 5
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $z_n=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^n$.
1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que z_n est un réel si et seulement si 12 divise $7n$.
2. En déduire l'ensemble $\{n\in\mathbb{N}\mid z_n\in\mathbb{R}\}$.

Exercice 6
On désigne par x un réel tel que $\dfrac{x}{\pi}$ ne soit pas un entier impair.

1. Donner les formes algébrique et trigonométrique de $\dfrac{1+i\,\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-i\,\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$.

2. Retrouver les expressions de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

3. Montrer que, pour tout $(n,\alpha)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}$ tel que $\dfrac{2\alpha}{\pi}$ et $\dfrac{2n\alpha}{\pi}$ ne soient pas des entiers impairs, on a :
$$\left(\frac{1+i\,\tan(\alpha)}{1-i\,\tan(\alpha)}\right)^n=\frac{1+i\,\tan(n\alpha)}{1-i\,\tan(n\alpha)}$$

Conjugaison et module d'un complexe

Exercice 7
Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ vérifiant $(c,d)\neq(0,0)$ pour que $\dfrac{a+ib}{c+id}$ soit réel.

Exercice 8
Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$.
Montrer que $\dfrac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur si et seulement si $z\in\mathbb{U}$.

Exercice 9
Soit $(a,b)\in\mathbb{C}\times\left(\mathbb{C}\setminus\{1\}\right)$.
Montrer que $\dfrac{a-b\bar{a}}{1-b}$ est réel si et seulement si a est réel ou b est de module 1.

Exercice 10
Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Démontrer : $|a-b|^2 \leqslant \left(1+|a|^2\right)\left(1+|b|^2\right)$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que l'inégalité précédente soit une égalité.

Exercice 11
Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $\bar{a}b \neq 1$. On pose : $c = \dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}$.

1. Démontrer que $|c| = 1$ si et seulement si $|a| = 1$ ou $|b| = 1$.

2. Démontrer que $|c| < 1$ si et seulement si $|a|$ et $|b|$ sont tous deux strictements supérieurs ou strictement inférieurs à 1.

Exercice 12
Soient a et b deux nombres complexes. Démontrer :

$$|a| + |b| \ \leqslant \ |a+b| + |a-b|$$

Déterminer les cas d'égalités.

Exercice 13
Soit $z \in \mathbb{C}$. Supposons :

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} \ = \ n\, z^n$$

Démontrer : $|z| \leqslant 1$.

Exercice 14 *(Identité du parallélogramme)*
Démontrer :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad |z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 \ = \ 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$$

En donner une interprétation géométrique.

Exercice 15

1. Soient a et b deux nombres complexes. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note : $M = \max\big(|a|, |b|\big)$.
Démontrer :

$$|a^n - b^n| \ \leqslant \ n\, M^{n-1}\, |a-b|$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer :

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| \ \leqslant \ \sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^k}{k!} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n$$

Linéarisation et factorisation

Exercice 16
Soit $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Linéariser les expressions de $\big(\sin(x)\big)^n$ et $\big(\cos(x)\big)^n$.

Exercice 17
Soit $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Factoriser les expressions de $\sin(nx)$ et $\cos(nx)$.

Exercice 18
Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^2(x)\, \sin^3(x)$.

Exercice 19

1. **Linéarisations**. Linéariser les expressions suivantes en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

a) $\cos^4(x)$
b) $\cos^3(2x)$
c) $\sin^4(x)$
d) $\sin^5(x)$

2. **Application : calcul de primitives**. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$.

a) $t \mapsto \sin^2(t)\, \cos^2(t)$
b) $t \mapsto \sin^3(t)\, \cos^3(t)$
c) $t \mapsto \cos^5(t)\, \sin^4(t)$
d) $t \mapsto \cos(2t)\, \mathrm{e}^{-4t}$
e) $t \mapsto \sin(3t)\, \sin^2(t)$
f) $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\, \sin(t)$

Exercice 20
Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kx)$

b) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$

c) $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cos(kx)$

d) $\sum\limits_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \sin(kx)$

2. ***a)*** Supposons : $x \notin 2\pi\,\mathbb{Z}$. Démontrer :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\ell=-k}^{k} \mathrm{e}^{i\ell x} \right) = \left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\, x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2$$

Calculs de sommes et produits

Dans tous les exercices qui suivent, « calculer » signifie donner une expression du réel ou complexe manipulé ne faisant apparaître ni de symbole de sommation, ni de symbole de produit.

Exercice 21
On pose : $u = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{7}}$. Calculer $\dfrac{u}{1+u^2} + \dfrac{u^2}{1+u^4} + \dfrac{u^3}{1+u^6}$.

Exercice 22

1. Vérifier, pour tout réel α : $1 - \mathrm{e}^{i\alpha} = -2i \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) \mathrm{e}^{\frac{i\alpha}{2}}$

2. Démontrer alors : $\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{11}} + \mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{11}} + \mathrm{e}^{\frac{5i\pi}{11}} + \mathrm{e}^{\frac{7i\pi}{11}} + \mathrm{e}^{\frac{9i\pi}{11}} = \dfrac{\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)}\, \mathrm{e}^{\frac{5i\pi}{11}}$

3. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{11}\right) + \cos\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) + \cos\left(\dfrac{5\pi}{11}\right) + \cos\left(\dfrac{7\pi}{11}\right) + \cos\left(\dfrac{9\pi}{11}\right)$.

Exercice 23
Soit $(n, \alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Calculer $\sum\limits_{p=0}^{n} \big(\cos(p\alpha)\big)^2$.

Exercice 24
Soit $(n, \alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ tel que : $\cos(\alpha) \neq 0$. Calculer $\sum\limits_{p=0}^{n} \dfrac{\cos(p\alpha)}{\big(\cos(\alpha)\big)^p}$.

Exercice 25
Soit $(a, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}$.

1. Développer l'expression $(1 + i\sqrt{a})^{2n}$.

2. Calculer alors le réel $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} a^k$.

3. Donner une expression simple du résultat lorsque $a = 3$.

Exercice 26
Soit $(n, \alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$.

1. Calculer le réel $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\alpha)$.

2. Vérifier que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $k \dbinom{n}{k} = n \dbinom{n-1}{k-1}$.

Calculer alors le réel $\sum\limits_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \cos(k\alpha)$.

3. En s'inspirant de la question précédente, calculer les réels suivants :

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} \cos(k\alpha)$

b) $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} \cos(k\alpha)$

Exercice 27
Soit $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. On pose : $\varphi : h \mapsto \sum\limits_{p=0}^{n} \cos(x + ph)$.

1. Déterminer une expression sans symbole de sommation de la fonction φ.

2. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, calculer $\sum\limits_{p=0}^{n} p \sin(x + ph)$.

Exercice 28
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on pose : $b_k = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{p=0}^{n-1} a_p \,\mathrm{e}^{\frac{2ipk\pi}{n}}$.

Démontrer, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$: $a_k = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{p=0}^{n-1} b_p \,\mathrm{e}^{-\frac{2ipk\pi}{n}}$.

Exercice 29
Soit $(n, z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}$. On pose : $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(z + \omega^k\right)^n$.

Exercice 30
Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à $p-1$, on appelle $N_{n,p,k}$ le plus grand entier naturel r tel que $pr + k \leqslant n$ et on pose :

$$S_{n,p,k} = \sum_{r=0}^{N_{n,p,k}} \binom{n}{pr+k}$$

1. En développant les expressions $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$, démontrer :

$$\left\{\begin{array}{lllll} S_{n,2,0} & + & S_{n,2,1} & = & 2^n \\ S_{n,2,0} & - & S_{n,2,1} & = & 0 \end{array}\right.$$

En déduire les valeurs de $S_{n,2,0}$ et $S_{n,2,1}$.

2. Justifier, pour tout $a \in \mathbb{C}$, l'égalité :

$$(1+a)^n = \sum_{r=0}^{N_{n,3,0}} \binom{n}{3r} a^{3r} + \sum_{r=0}^{N_{n,3,1}} \binom{n}{3r+1} a^{3r+1} + \sum_{r=0}^{N_{n,3,2}} \binom{n}{3r+2} a^{3r+2}$$

En développant alors $(1+1)^n$, $(1+j)^n$ et $(1+j^2)^n$, démontrer :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} S_{n,3,0} & + & S_{n,3,1} & + & S_{n,3,2} & = & 2^n \\ S_{n,3,0} & + & j\, S_{n,3,1} & + & j^2\, S_{n,3,2} & = & (1+j)^n \\ S_{n,3,0} & + & j^2\, S_{n,3,1} & + & j\, S_{n,3,2} & = & (1+j^2)^n \end{array}\right.$$

En déduire des expressions de $S_{n,3,0}$, $S_{n,3,1}$ et $S_{n,3,2}$ en fonction de n et j.
Indication : Pour résoudre le système, on pourra utiliser le fait que $1 + j + j^2 = 0$ *et chercher des combinaisons linéaires des équations du système considéré donnant directement chaque complexe cherché.*

Donner alors des expressions explicites de $S_{n,3,0}$, $S_{n,3,1}$ et $S_{n,3,2}$ sous forme de réels, en fonction de n.

3. Décrire une méthode permettant, en théorie, de déterminer tous les réels de l'ensemble $\{S_{n,p,k} \mid k \in [\![0, p-1]\!]\}$. On ne cherchera pas à prouver la validité de cette méthode.

Lieux de points

Exercice 31

1. On note f la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{2\}$ par :

$$f : z \mapsto \frac{z+1}{z-2}$$

a) Pour quels nombres $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$ a-t-on : $\left|f(z)\right| = 1$?

b) Pour quels nombres $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$ a-t-on : $\mathrm{Re}\left(f(z)\right) = 0$?

2. On note g la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$ par :

$$g : z \mapsto \frac{2z - i}{z - 2i}$$

a) Pour quels nombres $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ a-t-on : $g(z) \in \mathbb{R}$?

b) Pour quels nombres $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ a-t-on : $g(z) \in \mathbb{U}$?

Exercice 32

1. $(*)$ On note $f : z \mapsto \dfrac{1}{z-i}$. Déterminer $f(\mathbb{R})$.

2. On note $f : z \mapsto \dfrac{z-2}{z-6}$. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{6\}$ tels que : $f(z) \in i\mathbb{R}$.

3. On note $f : z \mapsto \dfrac{z+1}{\bar{z}-1}$. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tels que : $f(z) \in \mathbb{R}$.

4. On note $f : z \mapsto \dfrac{z+|z|}{2}$. Déterminer $f(\mathbb{C})$.

Exercice 33

Représenter graphiquement les ensembles suivants.

1. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| = 2\}$

2. $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leqslant |z-i| \leqslant 3\}$

3. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leqslant 3\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z+2| \leqslant 3\}$

4. $\{z \in \mathbb{C} \mid \max\big(\mathrm{Re}\,(z-i), \mathrm{Im}\,(z+1)\big) \leqslant 2\}$

5. $(*)$ $\{z \in \mathbb{C} \mid \big|\mathrm{Re}\,(z-1-i)\big| + \big|\mathrm{Im}\,(z-1-i)\big| \leqslant 2\}$

6. $(*)$ $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-3| + |z-1| = \sqrt{5}\}$

Exercice 34

Les questions ci-dessous sont mutuellement indépendantes.

1. Déterminer les complexes z tels que les points d'affixe z, z^2 et z^4 soient alignés.

2. Déterminer les complexes z tels que les points d'affixe z, z^2 et z^3 forment un triangle isocèle.

3. Déterminer les complexes z tels que les points d'affixe z, z^2 et z^3 forment un triangle rectangle en le point d'affixe z.