Opérateurs ensemblistes

Exercice 1
Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

1. Démontrer :

$$\big(A \cap B = A \cup B\big) \ \Rightarrow\ (A = B)$$

2. Démontrer :

$$A \setminus (A \setminus B) \ = \ A \cap B$$

Exercice 2

Soit E un ensemble.

Soient A, B et C des parties de E.

Démontrer que les trois assertions suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) $(A \setminus B) \subset C$

(ii) $(A \setminus C) \subset B$

(iii) $A \subset (B \cup C)$

Exercice 3

Soit E un ensemble.

Soient A et B des parties de E.

Déterminer explicitement les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap \overline{B}$ ainsi que $\overline{A} \cap B$ dans les cas suivants.

a) $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4\}$

b) $E = \mathbb{R}$, $A = \,]-\infty; 3]$, $B = [2; +\infty[$

c) $E = \mathbb{R}$, $A = \,]-\infty; 2]$, $B = [3; +\infty[$

d) $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{N}$, $B = \,]0; +\infty[$

Exercice 4

Soient X, Y et Z des ensembles.

Démontrer les affirmations suivantes :

a) Si $X \subset Y$ alors $X \cap Z \subset Y \cap Z$.

b) $(X \subset Y) \Leftrightarrow (X = X \cap Y)$

c) $X = (X \cap Y) \cup (X \setminus Y)$

d) $(X \cap Y) \cap (X \cap Z) = X \cap Y \cap Z$

Exercice 5 *(un peu de différence ensembliste)*

Soit E un ensemble.

Soient A et B des parties de E.

a) Que valent $A \setminus \varnothing$ et $A \setminus A$?

b) Montrer : $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B$.

c) Montrer : $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$.

Exercice 6

Soit E un ensemble.

Soient A et B des parties de E.

a) Montrer : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

b) Montrer : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

c) Montrer : $(A \cap B = A \cup B) \ \Leftrightarrow\ A = B$.

Exercice 7 *(équation ensembliste)*

Soit E un ensemble non vide.

Soient A et B des parties de E.

Résoudre, en discutant éventuellement sur la nature des parties A et B, l'équation $(A \cap X) \cup (B \cap \overline{X}) = \varnothing$, d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$.

Exercice 8 *(un peu de différence symétrique)*

Soit E un ensemble.

Soient A, B et C des parties de E.

On définit la différence symétrique de A et de B, notée $A\Delta B$ par :

$$\boxed{A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)}$$

a) Que valent $A\Delta A$ et $A\Delta\varnothing$?

b) Montrer : $A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

c) Montrer : $A\Delta B = (\bar{A}\cap B)\cup(A\cap\bar{B})$.

d) Montrer : $(A\Delta B)\Delta B = A$.

e) Montrer : $\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\,\mathbb{1}_A\,\mathbb{1}_B$.

f) En déduire que la loi Δ est associative sur $\mathscr{P}(E)$, c'est-à-dire :

$$A\Delta(B\Delta C) \;=\; (A\Delta B)\Delta C$$

Exercice 9

Soit E un ensemble.

Soient A, B et C des parties de E.

Montrer : $\left.\begin{array}{rcl} A\cup B & \subset & A\cup C \\ A\cap B & \subset & A\cap C \end{array}\right\} \Rightarrow B\subset C.$

Exercice 10

Déterminer les ensembles suivants.

a) $]0,3[\,\cup\,[2,5]$ ***b)*** $]0,3[\,\cap\,[2,5]$ ***c)*** $\big(]0,3[\,\cup\,]5,9[\big)\;\cap\;[1,6]$

d) $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*}\left[0,1-\frac{1}{n}\right[$ ***e)*** $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[$ ***f)*** $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[$

Exercice 11 *(de la bonne utilisation du quantificateur universel)*

Soit E un ensemble.

Soit A une partie de E.

a) Démontrer : $(\forall X\in\mathscr{P}(E),\;A\cup X = E) \;\Rightarrow\; A = E$.

b) Démontrer : $(\forall X\in\mathscr{P}(E),\;A\cap X = \varnothing) \;\Rightarrow\; A = \varnothing$.

Exercice 12

Soit E un ensemble.

Soient A et B des parties de E.

Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

a) $A\subset B$ ***b)*** $(E\setminus B)\subset(E\setminus A)$ ***c)*** $B\cup(E\setminus A) = E$

Exercice 13

Écrire mathématiquement les ensembles suivants.

1. Ensemble des suites réelles à termes compris entre 1 et 2 (au sens large).

2. Ensemble des suites réelles non décroissantes.

3. Ensemble des suites arithmétiques.

4. Ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ possédant au moint un point d'annulation.

5. Ensemble des fonctions définies sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et bornées.

6. Ensemble des fonctions constantes réelles définies sur $[0,1[$ et à valeurs dans $[-1,1]$.

7. Ensemble des fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de degré 3 et présentant 2 racines distinctes.

Ensembles finis

Exercice 14

Parmi ces ensembles, lesquels sont finis ? Écrire les ensembles finis sous forme extensive. Donner 3 éléments distincts des autres ensembles.

1) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$

2) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \geqslant 0\}$

3) $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$

4) $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k + 2\}$

5) $\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, \big(f(x)\big)^2 \leqslant 0\}$

6) $\{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$

7) $\{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{N}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{Z}, k \leqslant f(x) < k + 1\}$

8) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$

9) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0\}$

10) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \forall x \in \mathbb{R}, x = 3\}$

Ensemble des parties d'un ensemble E

Exercice 15

On considère $A = \{\{1, 2\}, 3, \varnothing\}$.

a) Combien d'éléments possède A ?

b) Détailler $\mathscr{P}(A)$.
Quel est le cardinal de cet ensemble ? Était-ce prévisible ?

Exercice 16

Soit E un ensemble.

Soient A et B des parties de E.

1. Démontrer que $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.

2. *a)* Démontrer que $\mathscr{P}(A \cup B) \supset \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$.

b) Y a-t-il égalité ?

Exercice 17

On note $E = \{1\}$ et $F = \{1, \pi\}$.

a) Détailler $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$ et $\mathscr{P}(F)$.

b) Est-ce que l'un est inclus dans l'autre ?

Image directe d'une application

Exercice 18

On considère les fonctions :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$$

1. Déterminer les ensembles suivants.

a) $f\big([0, 3]\big)$ *b)* $f\big([-1, 2]\big)$ *c)* $f\big(\mathbb{R}\big)$

d) $f\big([-5, 1] \cup [2, 4[\big)$ *e)* $f\big([-5, -3[\cup [2, 4[\big)$

2. Déterminer les ensembles suivants.

1. $g\big(\mathbb{R}\big)$ *2.* $g\big([0, \frac{\pi}{2}]\big)$ *3.* $g\big([-\frac{\pi}{4}, 0]\big)$ *4.* $g\big([-1, 2]\big)$

5. $g\big([-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup [0, \frac{\pi}{2}]\big)$

Exercice 12

Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une application définie et continue sur un intervalle I.

1. Si f est strictement croissante, que vaut $f(I)$ dans le cas où :

a) $I = [a, b]$ *b)* $I =]a, b]$ *c)* $I =]a, b[$ *d)* $I = [a, b[$

2. Répondre à la même question lorsque f est strictement décroissante.

3. Que peut-on dire dans le cas où f est simplement (dé)croissante ?
Et si l'on ne connaît pas la monotonie de f ?

Exercice 19

Soient E et F des ensembles.

Soient $f : E \mapsto F$ une application et A_1 et A_2 des parties de E.

a) Démontrer que : $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

b) Démontrer que : $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 20

Soit E un ensemble.

Soient $f : E \mapsto F$ une application et B_1 et B_2 des parties de F.

a) Montrer : $B_1 \subset B_2 \ \Rightarrow\ f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$

b) Montrer : $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

c) Montrer : $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Image réciproque d'un ensemble

Exercice 21

Soient E et F des ensembles.

Soient $A \in \mathscr{P}(E)$ et $B \in \mathscr{P}(F)$.

Soit $f : E \to F$ une application.

Démontrer : $f\Big(A \cap f^{-1}(B)\Big) = f(A) \cap B$.

Exercice 22

Soient E et F des ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

1. Démontrer : $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.

2. Établir : f est injective $\Leftrightarrow \forall A \in \mathscr{P}(E),\ f^{-1}\big(f(A)\big) = A$.

Exercice 23

On considère les fonctions :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$$

1. Déterminer les ensembles suivants.

a) $f^{-1}\big([0,9]\big)$ ***b)*** $f^{-1}\big([-1,2[\big)$ ***c)*** $f^{-1}\big(\mathbb{R}\big)$ ***d)*** $f^{-1}\big(\mathbb{R}_-\big)$

e) $f^{-1}\big([-5,1[\ \cup\ ]2,4]\big)$

2. Déterminer les ensembles suivants.

1. $g^{-1}\big(\mathbb{R}\big)$ ***2.*** $g^{-1}\big([0,1]\big)$ ***3.*** $g^{-1}\big([0,\frac{1}{2}]\big)$ ***4.*** $g^{-1}\big([-1,2]\big)$

5. $g^{-1}\big([3,5]\big)$

Exercice 24

Soient E et F deux ensembles.

Soient A une partie de E ($A \subset E$) et B une partie de F ($B \subset F$).

Montrer : $A \times B \ \subset\ E \times F$.

Exercice 25

1. Représenter graphiquement les ensembles suivants.

a) $A = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$ ***b)*** $B = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ***c)*** $C = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}$

d) $D = \{1,2,3\} \times [1,2]$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\} \times \{y \in \mathbb{R} \mid 1 < y^2 \leqslant 9\}$

f) $F = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2 \ \text{ et }\ 1 \leqslant y \leqslant 3\}$

Composée de fonctions

Exercice 26

On considère les deux applications f et g de $[\![1,9]\!]$ dans lui-même définies par leurs tables de valeurs :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	6	4	7	8	9	3	5	1	2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g(x)$	1	2	7	4	5	6	3	8	9

a) Réprésenter de la même façon les applications $g \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $f \circ g$.

b) Montrer que f est bijective et représenter de la même façon sa réciproque.

Exercice 27

Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ deux applications définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \ = \ n+1, \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} g(0) & = & 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ g(n) & = & n-1 \end{array} \right.$$

a) Étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité, éventuelle de f et g.

b) Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$.

Caractère injectif / surjectif / bijectif

Exercice 28

Soit $f : E \to E$ une application vérifiant : $f \circ f \circ f = id_E$.

Montrer que f est bijective et déterminer son inverse.

Exercice 29

Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.

a) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

b) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 30

Soient E, F, G trois ensembles.

Soient $g : E \to F$, $h : E \to F$, $f : F \to G$ trois applications.

Démontrer : $\left. \begin{array}{l} f \circ g = f \circ h \\ f \text{ injective} \end{array} \right\} \Rightarrow \ g = h.$

Exercice 31

Soit $f : E \to F$ une application.

Que signifient les propositions suivantes ?

a) $\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ y = f(x)$

b) $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$

c) $\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ y = f(x)$

Exercice 32

Dans chacun des cas suivants, l'application f est-elle injective, surjective, bijective ?

a) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$

b) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$

c) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$

d) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$

e) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$

f) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^+ & \xrightarrow{f} & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$

g) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$

h) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$

i) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$

j) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$

k) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^* & \xrightarrow{f} & \mathbb{Q}^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$

l) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$

Exercice 33

On considère l'application $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-1\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+2}{x+1} \end{array} \right.$

a) Démontrer que g est une bijection et déterminer sa réciproque.

b) Répondre aux mêmes questions pour $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array} \right.$

Exercice 34

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application.
Montrer que si f est strictement croissante alors f est injective.

b) Le résultat précédent est-il vérifié si f est strictement décroissante ?

c) Trouver les solutions de l'équation en x : $x + e^x = 1$.

Exercice 35

Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \to F$, $g : E \to G$ deux applications.

On considère la fonction h suivante.

$$h \ : \left| \begin{array}{ccc} E & \mapsto & F \times G \\ x & \mapsto & \big(f(x), g(x)\big) \end{array} \right.$$

a) Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective.

b) On suppose f et g surjectives. La fonction h est-elle surjective ?

Exercice 36

a) L'application $x \mapsto 2x$ est-elle injective, surjective, bijective, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
Et de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$? Et de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$?

b) L'application $x \mapsto x^2$ est-elle injective, surjective, bijective, de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$?
Et de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$? Et de $\mathbb{Q}^+$ dans $\mathbb{Q}^+$?

Exercice 37

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

a) Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer en fonction de y le nombre d'antécédents de y.

b) L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

c) Montrer : $\forall x \in [-1,1], f(x) \in [-1,1]$.
La restriction $g : [-1,1] \to [-1,1]$ de f est-elle bijective ?

Exercice 38

Soient E, F, G, H des ensembles.

Soient $f \in \mathcal{A}(E,F)$, $g \in \mathcal{A}(F,G)$ et $h \in \mathcal{A}(G,H)$.

On suppose que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives.

Démontrer que f, g, h sont bijectives.
(on pourra utiliser le résultat de l'exercice 29)

Exercice 39

On note f la fonction définie par :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z - \dfrac{1}{z} \end{array}$$

1. Montrer que f est surjective mais non injective.

2. Déterminer $f^{-1}(i\mathbb{R})$.

3. Déterminer $f(\mathbb{U})$.

Exercice 40
Soit f une application de A dans B.

1. Montrer que f est surjective si et seulement si : $\forall Y \in \mathscr{P}(B),\ f\big(f^{-1}(Y)\big) = Y$.

2. Montrer que f est injective si et seulement si : $\forall X \in \mathscr{P}(A),\ f^{-1}\big(f(X)\big) = X$.

Exercice 41
Donner des bijections reliant les ensembles suivants :

1. l'intervalle $[0,1]$ et l'intervalle $]0,1]$,

2. deux intervalles fermés $[a,b]$ et $[c,d]$ quelconques (avec $a < b$ et $c < d$),

3. deux intervalles ouverts $]a,b[$ et $]c,d[$ quelconques (avec $a < b$ et $c < d$),

4. deux intervalles semi-ouverts $]a,b]$ et $[c,d[$ quelconques (avec $a < b$ et $c < d$).

Exercice 42
Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on note $\varphi_{a,b,c}$ l'application suivante.

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{a,b,c} & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & ax^2+bx+c \end{array}$$

On considère alors l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ & & (a,b,c) & \mapsto & \varphi_{a,b,c} \end{array}$$

1. Écrit-on $\big(\Phi(1,2,-1)\big)(-3)$ ou $\Phi\big((1,2,-1)(-3)\big)$? Calculer celui qui a un sens (et qu'on note aussi parfois $\Phi(1,2,-1)(-3)$).

2. Déterminer $\displaystyle\bigcup_{f\in\Phi\left([0,1]^3\right)} f\big([0,1]\big)$.

3. Montrer que Φ est injective.

4. L'application Φ est-elle bijective ?

Exercice 43
On rappelle qu'on note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \delta & : & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ & & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

1. On considère la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique de premier terme A et de raison 2. Calculer $\delta(v)$.

2. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle quelconque. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note :

$$\delta^p = \underbrace{\delta\circ\cdots\circ\delta}_{p \text{ fois}}$$

Exprimer $\delta^p(u)$ en fonction des termes de la suite u.

3. Montrer que l'application δ est surjective.

4. Est-elle bijective ?

Des propriétés contre-intuitives

Exercice 44
On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs.

Démontrer que l'application $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & 2\mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}\right.$ est bijective.

(conclusion : il y a autant d'entiers naturels pairs que d'entiers naturels !)

Exercice 45
Démontrer que les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont en bijection.

Exercice 46
Démontrer que l'application f suivante est bijective.

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^* \\ & & (a,b) & \mapsto & 2^a\,(2b+1) \end{array}$$

Applications sur $\mathscr{P}(E)$

Exercice 47

Soit E un ensemble et soit $A \in \mathscr{P}(E)$.

On note :

$$\varphi_A \; : \; \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ X & \mapsto & A \cap X \end{array} \qquad \text{et} \qquad \psi_A \; : \; \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ X & \mapsto & A \cup X \end{array}$$

a) Sous quelle condition φ_A est-elle surjective ? Injective ?

b) Même question pour ψ_A.

Exercice 48

Soient A et B deux parties non vides d'un ensemble E.

On considère l'appication $f : \left| \begin{array}{ccccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(A) & \times & \mathscr{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A & , & X \cap B) \end{array} \right.$

a) Démontrer : (f est injective) $\Rightarrow (A \cup B = E)$.

b) Démontrer : (f est injective) $\Leftarrow (A \cup B = E)$.
(on pourra procéder par l'absurde et penser à former $X \cap (A \cup B)$ ainsi que $X \cap (A \cup B)$)

c) Démontrer : f est surjective $\Leftarrow A \cap B = \varnothing$.

d) Démontrer : f est surjective $\Rightarrow A \cap B = \varnothing$.
(on pourra procéder par l'absurde et raisonner sur l'existence d'un antécédent à $(A \setminus A \cap B, A \cap B)$)

e) Dans le cas où f est bijective, déterminer f^{-1}.