Étude de fonctions

Exercice 1

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

a. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 2}$

b. $f : x \mapsto \mathrm{e}^x \ln(2x+3)$

c. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{x^2+1}$

d. $f : x \mapsto \ln(x^5+1)$

Exercice 2 *Entraînement au calcul*

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

a. $f : x \mapsto 1 + \ln(1+x)$

b. $f : x \mapsto \dfrac{1+x}{1+\mathrm{e}^x} - x$

c. $f : x \mapsto x^{1/x}$

d. $f : x \mapsto \ln\left(2x - \dfrac{3}{x}\right)$

e. $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2-1}$

f. $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-7x}}{7} - 1$

g. $f : x \mapsto \sin(2\pi x) + \mathrm{e}^{-2x}$

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par : $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$.

a. Faire l'étude de la fonction f.

b. Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer le nombre d'antécédents de y par f.

Exercice 4

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des périodes de f est $\mathbb{Q}$. On a donc trouvé une fonction périodique qui n'admet pas de plus petite période strictement positive.

Exercice 5 *Étude de fonctions*

a. $f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$

b. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$

c. $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2-1}$

d. $f : x \mapsto 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 72x + 1$

e. $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^x}$

f. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{1/\ln x}$

g. $f : x \mapsto \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$

h. $f : x \mapsto x\sqrt{x}$

i. $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$

j. $f : x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

Logarithme, exponentielle et puissances

Exercice 6

Montrer (dans cet ordre !) les propriétés suivantes.

1) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leqslant x$

2) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leqslant 2\sqrt{x}$

Exercice 7

a. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.

b. Faire l'étude graphique de la fonction suivante.

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \ln(x^2) \end{array}$$

Exercice 8

Proposer deux méthodes différentes pour définir la fonction racine cinquième. Que pouvez-vous dire des ensembles de définition des deux fonctions que vous venez de définir ?

Exercice 9 *Où l'on démontre que* $-1 = 1$ ...

Commenter la démonstration suivante.

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = ((-1)^2)^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} = 1$$

Exercice 10
Déterminer l'ensemble des solutions des équations suivantes, d'inconnue réelle x.

(1) $3^{2x}+7^x=9^{x+1}$ | *(2)* $2^{x+1}-4^x=2^{2x+1}-1$ | *(3)* $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x}^x$

Exercice 11
Soit $a\in\mathbb{R}$. Déterminer les couples $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ vérifiant :

$$\begin{cases} \big(\ln(x)\big)^2+\big(\ln(y)\big)^2 = a\,\big(\ln(2)\big)^2 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Exercice 12
Résoudre l'inéquation $\ln\big(|2x+1|\big)+\ln\big(|2x-1|\big)-\ln\big(|x+1|\big)<\ln(2)$ d'inconnue réelle x.

Exercice 13
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $1<a<b$.

1. On considère les deux fonctions suivantes :

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & a^{(b^x)}\end{array} \qquad g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & b^{(a^x)}\end{array}$$

a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$: $\ln\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=b^x\left(\ln(a)-\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\ln(b)\right)$.

b) En déduire la limite de la fonction $\dfrac{f}{g}$ en $+\infty$. La connaissance de cette limite permet de savoir quelle fonction est « négligeable » au voisinage de $+\infty$; on dit que l'on fait une comparaison locale au voisinage de $+\infty$ des fonctions f et g.

2. En suivant une méthode analogue à celle de la question précédente, comparer les fonctions suivantes au voisinage de $+\infty$.

$$f_1:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & a^{(a^x)}\end{array} \qquad g_1:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x^{(x^a)}\end{array}$$

$$f_2:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & a^{(b^{\log_a(x)})}\end{array} \qquad g_2:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & b^{(a^{\log_b(x)})}\end{array}$$

Exercice 14
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n=\sum\limits_{p=1}^{n}\dfrac{1}{p}$.

1. a) Démontrer : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ 1-\dfrac{1}{x}\leqslant\ln(x)\leqslant x-1$.

b) En déduire : $\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{p+1}\leqslant\ln(p+1)-\ln(p)\leqslant\dfrac{1}{p}$.

2. a) Démontrer : $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ u_n-1\leqslant\ln(n)\leqslant u_n-\dfrac{1}{n}$.

b) En déduire que la suite $\big(u_n-\ln(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

c) Étudier les variations de la suite $\big(u_n-\ln(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

d) Justifier alors l'existence d'un réel γ, appelé constante d'Euler, tel que la suite $\big(u_n-\ln(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers γ.

3. a) Démontrer : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{2n}-u_n\leqslant\ln(2)\leqslant u_{2n}-u_n+\dfrac{1}{2n}$.

b) En déduire que la suite $(u_{2n}-u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2)$. En utilisant l'encadrement précédent, donner une estimation de $\ln(2)$ avec une précision de 10^{-1}.

Exercice 15
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction suivante :

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-nx^2} \end{array}$$

et on note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, préciser la régularité de f_n et donner une expression de f_n' et f_n''.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que f_n'' s'annule en un unique point a_n. Vérifier que le point de $\mathcal{C}_n$ d'abscisse a_n appartient à une droite indépendante de l'entier n choisi.

3. Montrer que lorsque n varie dans $\mathbb{N}^*$, la tangente à $\mathcal{C}_n$ au point d'abscisse a_n passe par un point indépendant de n dont on précisera les coordonnées.

Exercice 16
On considère la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x^2 - 2\ \ln(\mathrm{e}^x - x) \end{array}$$

1. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$.

2. Déterminer le domaine de définition de f et préciser la régularité de cette fonction.

3. Étudier les variations de f.

4. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ f(x) = x^2 - 2\ \ln(-x) - 2\ \ln\left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\right)$.

En déduire que f admet une limite en $-\infty$, que l'on déterminera.

5. Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $f(x) = x^2 - 2x - 2\ \ln(1 - x\,\mathrm{e}^{-x})$.

6. En déduire que f admet une limite en $+\infty$ que l'on déterminera, puis que le graphe Γ de f est asymptote à une parabole $\mathcal{P}$ dont on déterminera une équation.
Étudier alors la position relative de Γ et de $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 17
L'objectif de l'exercice est de montrer que pour tout $(m, n) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$:

$$\min(m^{\frac{1}{n}}, n^{\frac{1}{m}}) \leqslant 3^{\frac{1}{3}}$$

On rappelle que si $\mathcal{E}$ est un ensemble fini de réels, on désigne par $\min(\mathcal{E})$ le plus petit élément de $\mathcal{E}$.

1. Étudier les variations de la fonction suivante.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{\frac{1}{x}} \end{array}$$

Déterminer alors la valeur maximale prise par la fonction f.

2. Comparer $f(2)$ et $f(3)$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n^{\frac{1}{n}} \leqslant 3^{\frac{1}{3}}$.

3. Soit $(m, n) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$.

a) Vérifier : $\left(\min(m^{\frac{1}{n}}, n^{\frac{1}{m}})\right)^{\frac{m}{n} + \frac{n}{m}} \leqslant f(m)\, f(n)$.

b) Vérifier : $\dfrac{m}{n} + \dfrac{n}{m} \geqslant 2$. Conclure quant à l'objectif de cet exercice.

Exercice 18
Résoudre : $\ln\left(|x + 1|\right) - \ln\left(|2x + 1|\right) \leqslant \ln(2)$.

Exercice 19
Résoudre dans $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$: $\left\{ \begin{array}{rcl} 2\,\log_x(y) + 2\log_y(x) & = & -5 \\ x\,y & = & \mathrm{e} \end{array} \right.$

Exercice 20
Résoudre les équations suivantes d'inconnue x.

1. $2^{(x^3)} = 3^{(x^2)}$

2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. $\log_a(x) = \log_x(a)$

3. $\log_2(x) - \log_2(x) = 1$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. $2^x + 2^{x+1} + \cdots + 2^{x+n} = 3^x + 3^{x+1} + \cdots + 3^{x+n}$

Fonctions trigonométriques

Exercice 21

Montrer que les fonctions suivantes sont périodiques sur leur domaine de définition $\mathscr{D}_f$ (à déterminer) et déterminer leur plus petite période, c'est-à-dire le plus petit réel $T > 0$ tel que : $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(x+T) = f(x)$.

1. $f : t \mapsto \cos(\omega\, t + \varphi)$, où $(\omega, \varphi) \in \mathbb{R}^2$
2. $f : t \mapsto \sin^2(t)\ \cos(2t)$
3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos(t) + \cos(2t)}$
4. $f : x \mapsto 1 - \tan^2(t)$

Exercice 22

Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\big|\sin(nx)\big| \ \leqslant\ n\,\big|\sin(x)\big|$$

Exercice 23

Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \sin(x = -x + \dfrac{x^3}{6}$.

Fonctions hyperboliques

Exercice 24

Soit $(n, x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^2$. Donner une expression sans symbole de sommation du réel $\sum\limits_{p=0}^{n} \mathrm{ch}(x + py)$.

Exercice 25

Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\prod\limits_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\left(\dfrac{x}{2^k}\right)$.

Exercice 26

Résoudre l'équation $5\ \mathrm{ch}(x) - 4\ \mathrm{sh}(x) = 3$ d'inconnue réelle x.

Exercice 27

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples de fonctions réelles (f, g) définies sur $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

(a) $f(0) = 1$ | ***(b)*** $g' = f$ | ***(c)*** $f^2 - g^2 = 1$

1. Soit $(f, g) \in \mathcal{E}$. Montrer que la fonction f ne s'annule pas, puis : $f' = g$. (on pourra « dériver » l'équation fonctionnelle ***(c)***)
2. Soit $(f, g) \in \mathcal{E}$. On pose $u = f + g$ et $v = f - g$. Trouver une équation différentielle très simple vérifiée par u (resp. v).
   En déduire une expression explicite de cette fonction. (on pourra en premier lieu calculer la valeur de $g(0)$)
3. Démontrer : $\mathcal{E} = \{(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})\}$.

Exercice 28

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on considère le système d'inconnue (x, y) appartenant à $\mathbb{R}^2$:

$$(S_{a,b})\ \left\{\begin{array}{rcccl} \mathrm{ch}(x) & + & \mathrm{ch}(y) & = & a \\ \mathrm{sh}(x) & + & \mathrm{sh}(y) & = & b \end{array}\right.$$

Dans toute la suite de cet exercice, (a, b) désigne un couple de réels.

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer :
$$\left\{\begin{array}{rcccl} \mathrm{ch}(x) & + & \mathrm{ch}(y) & = & a \\ \mathrm{sh}(x) & + & \mathrm{sh}(y) & = & b \end{array}\right. \ \Leftrightarrow\ \left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y & = & a + b \\ (a-b)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y & = & a + b \end{array}\right.$$
2. Montrer que si $(S_{a,b})$ admet des solutions alors $a \geqslant 2$, $a + b > 0$ et $a - b > 0$.
3. On suppose : $a \geqslant 2$, $a + b > 0$ et $a - b > 0$. Montrer que le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est une solution de $(S_{a,b})$ si et seulement si $(\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^y)$ est une système de solutions de l'équation d'inconnue réelle z :
$$z^2 - (a+b)\,z + \frac{a+b}{a-b} \ =\ 0$$
   En distinguant alors trois cas en fonction du discriminant de l'équation du second degré précédente, résoudre le système d'équations $(S_{a,b})$.

Exercice 29

1. Démontrer que la fonction ch induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle à préciser et donner l'expression de la réciproque de cette bijection à l'aide de fonctions usuelles.

2. Effectuer le même travail pour la fonction sh.

Exercice 30

1. Étudier la fonction $\text{th} = \dfrac{\text{sh}}{\text{ch}}$.

2. Montrer que la fonction th réalise une bijection entre deux intervalles à déterminer et donner l'expression de la réciproque de cette bijection à l'aide de fonctions usuelles. On notera argth sa bijection réciproque.

3. Déterminer la dérivée de argth.

Inégalité triangulaire

Exercice 31

a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x-y|^2 \leqslant x^2 + 2|xy| + y^2$.

b. À l'aide de ce résultat, démontrez l'inégalité triangulaire.

Exercice 32

On suppose que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x-y| \leqslant |x| + |y|$ (inégalité triangulaire).
Montrer, dans cet ordre :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x+y| \leqslant |x| + |y|$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, ||x| - |y|| \leqslant |x-y|$

Partie entière

Exercice 33

a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.

b. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \lfloor -x \rfloor + \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$.

c. Démontrer alors que si p et q sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux, alors :

$$\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor k \, \frac{p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

Exercice 34

Tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.
Quelle est cette fonction ?

Exercice 35

Soient x et y deux nombres réels, et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer : $\lfloor x+y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.
Y a-t-il des cas d'égalité ? D'inégalité stricte ?

2. Démontrer : $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Valeur absolue

Exercice 36 *(Valeur absolue)*

Écrire sans valeur absolue les quantités suivantes.

a. $|x+1| + |x+2|$

b. $|x^2-1| - |x^2+1| + |2x^2 - x + 1|$

c. $\dfrac{|2x+7|+3}{7-|3x+2|}$

Exercice 37

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a. $|x+1| + |x+2| = 1$

b. $|x+1| + |2x+3| + |4x+5| = 7$

c. $|x^2+x-7| + |x| < 5$