## Récurrence

**Exercice 1**
Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7.

**Exercice 2**
Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 3^{2n} + 2^{6n-5}$ est un multiple de 11.

**Exercice 3**
Notons $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2$$

Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur sa valeur et démontrer cette conjecture par récurrence.

**Exercice 4**
On note $(w_n)$ la suite définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{1}{3}(w_n + 4n + 6) \end{cases}$$

Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 2n + \dfrac{1}{3^n}$.

**Exercice 5**
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_{n-1}}$$

Conjecturer puis démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une formule explicite de $u_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 6**
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $u_n$ en fonction de $u_0$ et $n$.

**Exercice 7**
Démontrer par récurrence les propriétés suivantes.

***a.*** $\forall n \geqslant 4,\ 2^n \leqslant n!$

***b.*** $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geqslant 1 + nx$

***c.*** $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=1}^{n} kk! = (n+1)! - 1$

## Sommes finies : définition

**Exercice 8**
Écrire à l'aide du symbole $\Sigma$ les expressions suivantes.

***a.*** $3^4 + 3^5 + 3^6 + \cdots + 3^{15}$

***b.*** $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{10}{1024}$

***c.*** $u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \cdots + \frac{u^n}{n}$

***d.*** $2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + 50$

## Sommes finies : manipulations d'indices

**Exercice 9**
Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} (k+1)\sqrt{n-k} \ = \ \sum_{i=0}^{n-1} (n-i+1)\sqrt{i}$

**Exercice 10**

*1.* Soient $a$ et $b$ deux réels. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$a^{n+1} - b^{n+1} \ = \ (a-b) \times \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

*2.* Donner de même une factorisation de $a^n - b^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

**Exercice 11**
On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n \ = \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} \qquad \text{et} \qquad v_n \ = \ \prod_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{k}}\right)^{\frac{1}{k+1}}$$

*1.* Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Puis préciser la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

*2.* En déduire la monotonie et la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

**Exercice 12**

*1.* Trouver trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a :

$$\frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}$$

*2.* En déduire la valeur de :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$$

## Sommes usuelles

**Exercice 13**
Calculer les sommes suivantes.

***a.*** $\displaystyle\sum_{k=5}^{11} k$

***b.*** $\displaystyle\sum_{k=9}^{125} k$

***c.*** $\displaystyle\sum_{i=5}^{11} x$

***d.*** $\displaystyle\sum_{i=5}^{11} (3+5i)$

***e.*** $\displaystyle\sum_{k=5}^{11} \frac{2^k}{3}$

***f.*** $\displaystyle\sum_{k=3}^{125} \frac{48}{2^k}$

***g.*** $\displaystyle\sum_{k=5}^{11} \frac{2^{k+1}}{3^{k-1}}$

***h.*** $\displaystyle\sum_{k=5}^{11} \frac{3^k}{2^{2k}}$

**Exercice 14**
Calculer les sommes suivantes.

***a.*** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k+1)$

***b.*** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k$

***c.*** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 5^{2k}$

***d.*** $\displaystyle\sum_{k=823}^{2012} 7$

***e.*** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1)$

***f.*** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2^k+k^2+2)$

***g.*** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (6k^2+4k+1)$

***h.*** $\displaystyle\sum_{k=1}^{9} \frac{1}{4^k}$

***i.*** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{4^{k+1}}$

**Exercice 15**

Démontrer les résultats suivants.

***a.*** $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} k(k+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

***b.*** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = 2n^4 - n^2$

***c.*** $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} kq^k = \dfrac{q}{(q-1)^2}\left(nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1\right)$

**Exercice 16**

Notons $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k$.

Dans cet exercice, on considère $n$ carrés emboîtés : le plus petit est de côté $S_1$, le suivant de côté $S_2$, ..., le dernier est de côté $S_n$.
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $C_i$ l'aire du carré de côté $S_i$.

***a.*** Soit $k \in [\![2, n]\!]$, exprimer $C_k - C_{k-1}$ en fonction de $S_k$ et $S_{k-1}$.

***b.*** En déduire une expression de $C_k - C_{k-1}$ en fonction de $k$.

***c.*** Déduire de la question précédente que $C_n - C_1 = \sum\limits_{k=2}^{n} k^3$.

***d.*** Conclure sur la relation liant la somme des $n$ premiers entiers et la somme des $n$ premiers cubes.

**Exercice 17**

Calculer les produits suivants.

***a.*** $\prod\limits_{k=0}^{n} 3$

***b.*** $\prod\limits_{k=1}^{n} (2k)$

***c.*** $\prod\limits_{k=0}^{n} (2k+1)$

***d.*** $\prod\limits_{k=0}^{n} q^k$

***e.*** $\prod\limits_{k=0}^{n} q^{2^k}$

**Exercice 18**

Que vaut la somme des $n$ permiers entiers pairs ? Impairs ?

**Exercice 19**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \neq 1$.

On définit la suite de terme général $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k.q^k$.

On définit la fonction $f_n : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$.

Le but de cet exercice est de démontrer de manière directe le dernier point de l'exercice 15.

***a.*** Calculer $f_n'$, la dérivée de la fonction $f_n$ par rapport à la variable $x$.

***b.*** En déduire une relation entre $u_n$ et $f_n'(q)$.

***c.*** En reconnaissant une somme classique, simplifier l'expression de $f_n(x)$.

***d.*** Calculer $f_n'$ à l'aide du résultat de la question précédente.

***e.*** En déduire le résultat souhaité.

**Exercice 20**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in ]1, +\infty[$. Démontrer : $\dfrac{a^n - 1}{a-1} \leqslant n\, a^{n-1}$.

**Exercice 21**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire à l'aide de factorielles :

***a)*** $\prod\limits_{i=1}^{n} (2i)$

***b)*** $\prod\limits_{i=3}^{n} i^2$

***c)*** $\prod\limits_{i=1}^{n} (n+5-i)$

***d)*** $\prod\limits_{i=1}^{n} (2i-1)$

***e)*** $\prod\limits_{k=1}^{n} (3k+1)(3k-1)$

**Exercice 22**
On note $\alpha = -\frac{1}{2}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer à l'aide de factorielles la quantité suivante :

$$\frac{\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

## Sommes doubles

**Exercice 23**
Soient $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n, \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{p} b_i\right)$$

**Exercice 24**
Soient $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} a_{ij}\right)$$

**Exercice 25** *(Sommation suivant les « diagonales »)*
Soit $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \left(\sum_{i+j=k} a_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n-i+1} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n-j+1} a_{i,j}\right)$$

**Exercice 26**
Calculer les sommes doubles suivantes.

***a.*** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}\right)$

***b.*** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$

***c.*** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$

***d.*** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$

***e.*** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j|$

***f.*** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i2^j$

**Exercice 27**
Soit $(a, x) \in \mathbb{R}^2$. Calculer les sommes et produits suivants.

***a.*** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \min(i,j)\right)$

***b.*** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (i+j)$

***c.*** $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$

***d.*** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a^{i+j}$

***e.*** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a^{i+j}$

***f.*** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \exp(kx)$

**Exercice 28**
Soit $(a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. Montrer que pour tout $n$ appartenant à $\mathbb{N}^*$, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j$$