Exercice 1

- L'espace $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne usuelle.
- On pose $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z = y - z + t = 0\}$.

1. Déterminer la dimension et une base orthonormale de F. $F^\perp$.

2. Déterminer les matrices, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, de la projection orthogonale sur F et de la symétrie orthogonale par rapport à F.

Exercice 2

Soient $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. On munit $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.
Déterminer la distance de M à E.

Exercice 3

- Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique.

1. Montrer que les sous-espaces $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans E, et exprimer la distance d'une matrice M à $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ en fonction de M et ${}^tM$.

2. Soit H l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la somme des coefficients est nulle. Calculer la distance d'une matrice M à H.

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x - 2y + z = 0$.

Exercice 5

Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Déterminer $\displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \left(t^2 - at - b\right)^2 \mathrm{e}^{-t}\ dt$.

Exercice 6

Sur $\mathbb{R}_n[X]$ on définit l'application $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)\ Q^{(k)}(1)$.

1. Montrer que c'est un produit scalaire.

2. Montrer que l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner sa dimension. Calculer $\mathrm{d}(1,E)$.

Exercice 7

Soit $E = \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$.

1. Montrer que la formule :

$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 (fg + f'g')$$

définit un produit scalaire sur E.

2. On considère les sous-espaces $V = \{f \in E \mid f'' = f\}$ et $W = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ de E.

a) Soient $f \in V$ et $g \in E$. Montrer que $\langle f|g\rangle = f'(1)\,g(1) - f'(0)\,g(0)$.
En déduire que V et W sont supplémentaires orthogonaux relativement à $\langle\cdot|\cdot\rangle$.

b) Montrer que les fonctions exp et $\dfrac{1}{\exp}$ forment une base orthogonale de V.
En déduire une expression explicite de la projection orthogonale sur V.

Exercice 8
Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ pour que la formule : $\langle P|Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)\, Q(a_k)$ définisse un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On suppose cette condition vérifiée dans la suite.

2. Soit $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}$.
Déterminer $F^\perp$ et calculer la distance de X^n à F.

Exercice 9
Soient u et v deux vecteurs distincts d'un espace euclidien E.

1. Montrer que s'il existe une symétrie orthogonale s échangeant u et v, alors $\|u\| = \|v\|$.

2. Montrer la réciproque, et expliciter une telle symétrie orthogonale s en fonction de u et v.

Généralités

Exercice 10
Soient E un espace préhilbertien réel, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, et $x \in E$.

1. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$, alors : $\forall y \in E, \lim_{n\to+\infty} \langle x_n - x|y \rangle = 0$.

2. Montrer que la réciproque est vraie si E est de dimension finie, mais fausse en général.

Exercice 11

- On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
- On considère $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|a\| = 1$
  et on pose $A = (a_i a_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'endomorphisme canoniquement associé à A est un projecteur orthogonal.

2. Étudier l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $2A - I_n$.

Exercice 12
Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E tel que :

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$$

1. Montrer que pour tout couple $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E, et que la matrice de u dans toute base orthonormale de E est antisymétrique.

Exercice 13
On considère une famille de vecteurs $(e_1, \ldots, e_p)$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!],\ i \neq j \ \Rightarrow\ \langle e_i|e_j \rangle < 0$$

Une telle famille est dite *strictement obtusangle.*

1. Trouver une telle famille lorsque $n = 2$ et $p = 3$.

2. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^p$.
On pose $x = \sum_{k=1}^{p} x_k \cdot e_k$ et $y = \sum_{k=1}^{p} |x_k| \cdot e_k$. Montrer : $\|x\| \geqslant \|y\|$.

3. Montrer que si $x = 0$, alors soit tous les x_k sont nuls, soit tous les x_k sont non nuls.

4. Montrer : $p \leqslant n + 1$.

Exercice 14

- Soit E un espace euclidien.
- Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.
- Pour tout $f \in (E)$, on pose $\alpha(f) = \mathrm{tr}({}^t MM)$, où $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

1. Montrer que $\alpha(f)$ ne dépend pas de la base orthonormale choisie.

2. Soit p un projecteur de E.
Montrer que $\alpha(p) \geqslant \mathrm{rg}(p)$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 15

On considère l'application φ définie par :

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi & : & \mathbb{R}[X] & \times & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ & & (P & , & Q) & \mapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\,Q(x)\ \mathrm{e}^{-x^2}\ dx \end{array}$$

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ \mathrm{e}^{-x^2}$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $H_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = H_n(x)\ \mathrm{e}^{-x^2}$$

b. Montrer que H_n est de degré n, et est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ si $n \geqslant 1$.

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16

- Soient E un espace euclidien et p un projecteur de E.

Montrer : p est un projecteur orthogonal $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 17

- Soit E un espace euclidien.
- Pour une famille $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$, on note $G(u_1, \dots, u_p) = (\langle u_i \mid u_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ la *matrice de Gram* de la famille $(u_1, \dots, u_p)$.

1. Soit M la matrice des coordonnées de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ dans une base orthonormale de E. Montrer que $G(u_1, \dots, u_p) = {}^tMM$.

2. Montrer que $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) = \mathrm{rg}(G(u_1, \dots, u_p))$.

3. Montrer que $\det(G(u_1, \dots, u_p))$ n'est pas modifié si l'on ajoute à l'un des vecteurs de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ une combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille.

4. Soient $x \in E$ et $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_p)$.

Montrer que $\det\big(G(x, u_1, \dots, u_p)\big) = \mathrm{d}(x, F)^2 \times \det\big(G(u_1, \dots, u_p)\big)$.

Écrits de concours

Exercice 18 *(d'après* `EML S 2020`*)*

- Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.
- On note $\mathscr{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

PARTIE A : Étude d'un produit scalaire

1. Montrer que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\ \mathrm{e}^{-t} dt$ converge.

2. Pour tout k de $\mathbb{N}$, on pose $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$.

a) Pour tout k de $\mathbb{N}$, déterminer à l'aide d'une intégration par parties une relation entre les intégrales I_{k+1} et I_k.

b) En déduire : $\forall k \in \mathbb{N}$, $I_k = k!$.

Pour tout couple (P, Q) de $\mathbb{R}[X]^2$, on pose : $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$.

3. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Dans toute la suite du problème, on munit $\mathbb{R}[X]$ de ce produit scalaire et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

4. Calculer, pour tout (i, j) de $\mathbb{N}^2$, $\langle X^i, X^j \rangle$ et, pour tout i de $\mathbb{N}$, $\|X^i\|$.

On admet qu'il existe une unique suite de polynômes $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :

× pour tout k de $\mathbb{N}$, le polynôme Q_k est de degré k et de coefficient dominant strictement positif,

× pour tout k de $\mathbb{N}$, la famille $(Q_0, \dots, Q_k)$ est une famille orthonormale.

5. ***a)*** Déterminer Q_0 et Q_1 et vérifier que $Q_2(X) = \dfrac{1}{2}\ X^2 - 2\,X + 1$.

b) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, la famille $\mathcal{C}_k = (Q_0, \dots, Q_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$.

On définit la matrice $H_n = (h_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$ de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2,\ h_{i,j} = \langle X^{i-1}, X^{j-1} \rangle$$

On note également A_n la matrice de la famille $\mathscr{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$ dans la base $\mathcal{C}_n$.

6. **Étude du cas** $n=2$

a) Expliciter la matrice H_2.

Montrer que H_2 est inversible et vérifier : $H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ -3 & 5 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

b) Expliciter la matrice A_2 et calculer ${}^tA_2A_2$. Que remarque-t-on ?

7. On note, pour tout (i,j) de $[\![1,n+1]\!]^2$, $a_{i,j}$ le coefficient d'indice (i,j) de la matrice A_n.

a) Justifier que la matrice A_n est inversible.

b) Justifier : $\forall j \in [\![1,n+1]\!]$, $X^{j-1} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} a_{k,j}\, Q_{k-1}$.

En déduire : $\forall (i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2$, $\langle X^{i-1}, X^{j-1}\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n+1} a_{k,i}\, a_{k,j}$.

c) Montrer alors la relation : $H_n = {}^tA_nA_n$.

8. ***a)*** Montrer que la matrice H_n est inversible.

b) Établir (sans calcul) que la matrice H_n est diagonalisable.

c) Montrer que les valeurs propres de H_n sont strictement positives.
(On pourra calculer, pour tout vecteur propre Y de H_n, ${}^tY H_n Y$.)

PARTIE B : Étude d'une projection

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

On définit la matrice colonne $U = \begin{pmatrix} \langle P, 1\rangle \\ \langle P, X\rangle \\ \vdots \\ \langle P, X^n\rangle \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

9. Soit R un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.

On note $V = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de R dans la base $\mathscr{B}_n$.

a) Montrer, pour tout i de $[\![0,n]\!]$: $\langle R, X^i\rangle = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k\, \langle X^i, X^k\rangle$.

b) Montrer :

$$\begin{array}{c} R \text{ est le projeté orthogonal} \\ \text{de } P \text{ sur } \mathbb{R}_n[X] \end{array} \Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![0,n]\!],\ \langle P, X^i\rangle = \langle R, X^i\rangle$$

En déduire : $\begin{array}{c} R \text{ est le projeté orthogonal} \\ \text{de } P \text{ sur } \mathbb{R}_n[X] \end{array} \Leftrightarrow \quad V = H_n^{-1}\,U$.

10. **Retour au cas** $n=2$

Déterminer le projeté orthogonal du polynôme X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

11. On souhaite retrouver le résultat précédent par une méthode différente.
On définir la fonction f sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ f(a,b,c) = \int_0^{+\infty} (a+bt+ct^2-t^3)^2\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

a) Vérifier que pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$:

$$f(a,b,c) = a^2+2b^2+24c^2+2ab+4ac+12bc-12a-48b-240c+720$$

b) Montrer que f admet un unique point critique (a_0,b_0,c_0) vérifiant :

$$H_2 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \\ 120 \end{pmatrix}$$

c) Montrer que la matrice hessienne de f au point (a_0,b_0,c_0) est la matrice $2\,H_2$.

d) En déduire que la fonction f admet au point (a_0,b_0,c_0) un minimum local.

e) Justifier : $\inf\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} f(a,b,c) = \inf\limits_{R\in\mathbb{R}_2[X]} \|X^3-R\|^2$.

En déduire que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^3$ et que ce minimum est atteint en un unique point.

f) Retrouver alors l'expression du projeté orthogonal du polynôme X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 19 *(d'après* `EML S 2019`*)*

- On note E l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et E_2 l'ensemble des fonctions f de E telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(f(x)\big)^2 \, dx$ converge.
- Pour toute fonction f de E, on note toujours $\Phi(f)$ la fonction définie **dans cette partie sur** $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \Phi(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^x t f(t)\, dt & \text{si } x > 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. a) Justifier : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |\, xy\,| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$.

b) En déduire que, pour tout couple de fonctions $(f,g) \in E_2 \times E_2$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx$ est absolument convergente.

2. Montrer alors que E_2 est un sous-espace vectoriel de E.

On considère l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $E_2 \times E_2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (f,g) \in E_2 \times E_2,\ \langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx$$

3. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire de E_2.

On munit E_2 de ce produit scalaire et de la norme associée $\|\cdot\|$.

4. Soit f une fonction de E_2.

On note, pour tout x de $\mathbb{R}_+$: $h(x) = \displaystyle\int_0^x t f(t)\, dt$.

a) Calculer les limites de $x \mapsto \dfrac{\big(h(x)\big)^2}{x^4}$ et de $x \mapsto \dfrac{\big(h(x)\big)^2}{x^3}$ en 0.

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall X > 0, \int_0^x \frac{\big(h(x)\big)^2}{x^4}\, dx = -\frac{1}{3} \frac{\big(h(X)\big)^2}{X^3} + \frac{2}{3} \int_0^x f(x)\ \Phi(f)(x)\, dx$$

c) Soit $X > 0$. En étudiant le signe de la fonction polynomiale

$$\lambda \mapsto \int_0^x \big(\lambda f(x) + \Phi(f)(x)\big)^2\, dx$$

montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante :

$$\int_0^x f(x)\Phi(f)(x)\, dx \leqslant \left(\int_0^x \big(f(x)\big)^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_0^x \big(\Phi(f)(x)\big)^2\, dx\right)^{1/2}$$

d) En déduire : $\forall X > 0, \left(\displaystyle\int_0^x \big(\Phi(f)(x)\big)^2\, dx\right)^{1/2} \leqslant \dfrac{2}{3}\left(\displaystyle\int_0^x \big(f(x)\big)^2\, dx\right)^{1/2}$.

e) Montrer alors que la fonction $\Phi(f)$ appartient à E_2 et que l'on a :

$$\|\Phi(f)\| \leqslant \frac{2}{3} \|f\|$$

f) En utilisant la relation de la question **4.b**, justifier que la limite de $X \mapsto X\big(\Phi(f)(X)\big)^2$ en $+\infty$ est finie, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.

g) En déduire : $\|\Phi(f)\|^2 = \dfrac{2}{3}\langle \Phi(f), f\rangle$.

Exercice 20 *(d'après* `EDHEC S 2019`*)*

- Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.
- On se place dans un espace euclidien E de dimension n.
  On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.
- Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y\rangle$ et la norme de x est notée $\|x\|$.

Partie 1 : définition de l'adjoint $u^\star$ d'un endomorphisme u de E

Dans toute cette partie, u désigne un endomorphisme de E.

On se propose de montrer qu'il existe un unique endomorphisme de E, noté $u^\star$, qui à tout vecteur y de E associe le vecteur $u^\star(y)$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle$$

1. a) Montrer que si $u^\star$ existe, alors on a, pour tout y de E :

$$u^\star(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle \ e_i$$

b) En déduire que si $u^\star$ existe, alors $u^\star$ est unique.

2. a) Vérifier que l'application $u^\star$ définie par l'égalité établie à la question ***1.a)*** est effectivement un endomorphisme de E.

b) Conclure que cette application est solution du problème posé, c'est-à-dire que c'est l'unique endomorphisme de E, appelé adjoint de u, vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2, \ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle$$

Partie 2 : étude des endomorphismes normaux

On dit que u est un endomorphisme normale quand on a l'égalité :

$$u \circ u^\star = u^\star \circ u$$

3. Soit f un endomorphisme symétrique de E. Donner son adjoint et vérifier que f est normal.

Dans la suite, u désigne un endomorphisme normal.

4. a) Montrer que : $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^\star(x)\|$.

b) En déduire que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}\,(u^\star)$.

5. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par $u^\star$.

6. On suppose que u possède une valeur propre λ et on note E_λ le sous espace propre associé.

a) Montrer que E_λ est stable par $u^\star$.

b) Établir que $(u^\star)^\star = u$ puis en déduire que $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

Exercice 21 *(d'après* `EDHEC S 2018`*)*

- On désigne par n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.
- On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^p$.
- Le produit scalaire canonique des vecteurs x et y de $\mathbb{R}^p$ est noté $\langle x, y\rangle$ et la norme du vecteur x est notée $\|x\|$.

1.
- Dans cette question, on considère n vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_n$ de $\mathbb{R}^p$, tous de norme égale à 1.
- À tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on associe le vecteur $w_x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \cdot u_k$.
- On se propose de montrer qu'il existe des n-uplets $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, dont les coordonnées sont éléments de $\{-1, 1\}$, pour lesquels $\|w_x\| \leqslant \sqrt{n}$ et d'autres pour lesquels $\|w_x\| \geqslant \sqrt{n}$.
- À cet effet, on considère n variables aléatoires réelles X_1, X_2, ..., X_n, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, et telles que pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on ait :

$$\mathbb{P}\big(\{X_k = 1\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X_k = -1\}\big) = \frac{1}{2}$$

- On considère l'application X suivante :

$$X \ : \ \begin{array}{rcl} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & \left\| \sum\limits_{k=1}^{n} X_k(\omega) \cdot u_k \right\|^2 \end{array}$$

- On admet que X est une variable aléatoire réelle définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) Calculer, pour tout couple (i,j) de $[\![1, n]\!]^2$, la valeur de $\mathbb{E}(X_i X_j)$.

b) En déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

c) Conclure quant à l'objectif de cette question.

2. • Dans cette question, on considère n réels $p_1, p_2, \ldots, p_n$, tous éléments de $]0,1[$, ainsi que n vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de $\mathbb{R}^p$ vérifiant :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \|v_k\| \leqslant 1$$

• On pose $z = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k \cdot v_k$ et on se propose de montrer qu'il existe un n-uplet $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dont les coordonnées sont dans $\{0,1\}$, tel que, en notant $y_x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \cdot v_k$, on ait :

$$\|z - y_x\| \ \leqslant\ \frac{\sqrt{n}}{2}$$

• À cet effet, on considère n variables aléatoires $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, et telles que, pour tout k de $[\![1,n]\!]$, Y_k suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_k)$.

• On considère l'application Y suivante :

$$Y : \begin{array}{rcl} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & \left\| \sum\limits_{k=1}^{n} (p_k - Y_k(\omega)) \cdot v_k \right\|^2 \end{array}$$

• On admet que Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) Calculer, pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, la valeur de $\mathbb{E}\Big((p_i - Y_i)(p_j - Y_j)\Big)$.

b) Justifier que Y possède une espérance et montrer :

$$\mathbb{E}(Y) \leqslant \frac{n}{4}$$

c) Conclure quant à l'objectif de cette question.

Exercice 22 *(d'après* `EDHEC S 2021`*)*

• On considère un espace euclidien E pour lequel le produit scalaire de deux vecteurs x et y est noté $\langle x, y\rangle$, tandis que la norme du vecteur x est notée $\|x\|$. Le vecteur nul de E est noté 0_E.

• On considère aussi un endomorphisme f de E, différent de l'endomorphisme nul, et antisymétrique, c'est-à-dire qu'il vérifie :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$$

1. Montrer que : $\forall x \in E$, $\langle f(x), x\rangle = 0$.

2. Établir l'égalité : $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$.

3. On pose $s = f \circ f$. Montrer que s est un endomorphisme symétrique de E et que ses valeurs propres sont toutes dans $\mathbb{R}_-$.

4. On note g l'application qui à tout vecteur x de $\mathrm{Im}(f)$ associe $g(x) = f(x)$ et on pose $t = g \circ g$.

a) Montrer que g est un endomorphisme antisymétrique de $\mathrm{Im}(f)$.

b) En déduire que les valeurs propres de t sont toutes dans $\mathbb{R}_-^*$.

Dans les deux questions suivantes, on considère une valeur propre λ de t et on note $E_\lambda(t)$ le sous-espace propre de t associé à cette valeur propre.

5. On considère un vecteur e_1 non nul de $E_\lambda(t)$.

a) Montrer que $(e_1, g(e_1))$ est une famille d'éléments de $E_\lambda(t)$, orthogonale et libre.

b) En déduire, en considérant l'orthogonal F_2 de $\mathrm{Vect}(e_1, g(e_1))$ dans $E_\lambda(t)$, que la dimension de $E_\lambda(t)$ est paire et qu'il existe un entier naturel p non nul, ainsi que p vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_p$ de $E_\lambda(t)$, tels que $(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2), \ldots, e_p, g(e$
soit une base orthogonale de $E_\lambda(t)$.

6. Soit k un entier de $[\![1,p]\!]$.

a) Montrer que l'on a : $\|g(e_k)\|^2 = -\lambda \|e_k\|^2$.

b) On considère les vecteurs $e'_k = \dfrac{1}{\|e_k\|}\ e_k$ et $e''_k = \dfrac{1}{\|g(e_k)\|}\ g(e_k)$.

Établir : $g(e'_k) = \sqrt{-\lambda}\ e''_k$ et $g(e''_k) = -\sqrt{-\lambda}\ e'_k$.

7. a) Montrer que le rang de f est pair.

b) On pose $r = \dfrac{1}{2}\ rg(f)$. Déduire des questions précédentes qu'il existe une base orthonormale $\mathscr{B}$ de E et r réels $a_1, \ldots, a_r$ strictement positifs, pas nécessairement distincts, tels que la matrice M de f dans $\mathscr{B}$ soit :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & & & (0) & & \\ & & 0 & -a_2 & & & & & & \\ & & a_2 & 0 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & 0 & -a_r & & & \\ & & & & & a_r & 0 & & & \\ & & (0) & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ou } M = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & (0) & \\ & & 0 & -a_2 & & & \\ & & a_2 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & (0) & & & & 0 & -a_r \\ & & & & & a_r & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 23 *(d'après* `Centrale 2 2022 - PSI`*)*

Structure préhilbertienne de E

On note E l'ensemble des fonctions f continues de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\ \frac{e^{-t}}{t}\ dt$ converge.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on note p_α la fonction : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^\alpha \end{array}$.

1. Montrer que si $f \in E$ et $g \in E$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, g(t)\ \frac{e^{-t}}{t}\ dt$ est absolument convergente.

2. En déduire que E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $f \in E$ et $g \in E$, on pose : $\langle f \mid g \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, g(t)\ \frac{e^{-t}}{t}\ dt$.

3. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

La norme $\|\cdot\|$ associée à ce produit scalaire est donc définie pour toute fonction $f \in E$ par :

$$\|f\| \ = \ \left(\int_0^{+\infty} f^2(t)\ \frac{e^{-t}}{t}\ dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

4. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \|k_x\| = 0$.

On rappelle que pour tout $x > 0$, $k_x(t) = e^{\min\,(x,t)} - 1$.

5. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\ e^{-t}\ dt = k!$.

6. On rappelle que les fonctions p_α ont été définies dans les notations en tête de sujet. La famille $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle une famille orthogonale de E ?

Un opérateur sur E

À chaque fonction $f \in E$, on associe la fonction $U(f)$ définie pour tout $x > 0$ par :

$$U(f)(x) \ = \ \langle k_x \mid f \rangle \ = \ \int_0^{+\infty} \left(e^{\min\,(x,t)} - 1 \right) f(t)\, \frac{e^{-t}}{t}\ dt$$

7. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour toute fonction $f \in E$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} U(f)(x) = 0$$

8. Montrer que pour toute fonction $f \in E$ et pour tout $x > 0$:

$$U(f)(x) \ = \ \int_0^x \left(1 - e^{-t}\right)\ \frac{f(t)}{t}\ dt + (e^x - 1)\ \int_0^x f(t)\ \frac{e^{-t}}{t}\ dt$$

9. Soit $f \in E$. Montrer que $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie, pour tout $x > 0$:

$$\big(U(f)\big)'(x) \;=\; \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} f(t)\, \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt$$

Dans la suite, pour alléger les notations, la dérivée de la fonction $U(f)$ est notée $U(f)'$.

10. Soit $f \in E$. Montrer que $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que la fonction $U(f)$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle :

$$y'' - y' = -\frac{f(x)}{x}$$

11. Montrer que pour tout $f \in E$ et pour tout $x > 0$:

$$\big|\, U(f)'(x) \,\big| \;\leqslant\; \mathrm{e}^x \, \|f\| \left(\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \;\leqslant\; \|f\| \, \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}$$

12. Déduire de ce qui précède que U est un endomorphisme de E et que pour tout $f \in E$ et tout $x > 0$:

$$\big|\, U(f)(x) \,\big| \;\leqslant\; 4\,\|f\| \, \frac{\sqrt{x}\, \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{1+x}$$

13. En déduire : $\|\, U(f) \,\| \;\leqslant\; 4\,\|f\|$.

14. Montrer que U est injectif.

15. L'endomorphisme U est-il surjectif ?

On fixe deux fonctions f et g de E. Pour $x > 0$, on pose :

$$F(x) \;=\; -U(f)'(x)\, \mathrm{e}^{-x}$$

16. Vérifier que F est une primitive de $x \mapsto f(x)\, \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

17. Montrer que pour tout $x > 0$, $\big|\, F(x)\; U(G)(x) \,\big| \;\leqslant\; \dfrac{4\,\|f\|\; \|g\|}{1+x}$.

18. Montrer que pour tout $x \in \,]0,1]$, $\big|\, F(x) \,\big| \;\leqslant\; \|f\| \, \big(\mathrm{e}^{-1} - \ln(x)\big)^{\frac{1}{2}}$.
*On pourra utiliser la question **11**.*

19. Montrer l'existence et calculer les valeurs des limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction $t \mapsto F(t)\; U(g)(t)$.

20. Montrer que $\langle f \,|\, U(g) \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} U(f)'(t)\, U(g)'(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

21. En déduire que $\langle f \,|\, U(g) \rangle = \langle U(f) \,|\, g \rangle$.

Exercice 24 *(d'après* `Centrale 2 2021 - PC`*)*

Polynômes orthogonaux et applications

- Dans tout ce sujet, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et w est une fonction continue et strictement positive de I dans $\mathbb{R}$; on dit que w est *un poids* sur I.
- Étant donné une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f\,w$ est intégrable sur I, on cherche à approcher l'intégrale $\displaystyle\int_I f(x)\ w(x)\ dx$ par une expression de la forme :
$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j\ f(x_j)$$
où $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ sont $n+1$ points distincts dans I.
- Une telle expression $I_n(f)$ est appelée *formule de quadrature* et on note :
$$e(f) = \int_I f(x)\ w(x)\ dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$$
l'*erreur de quadrature* associée.
- On remarque que e est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions f de I dans $\mathbb{R}$ telles que $f\,w$ est intégrable sur I.
- On rappelle qu'un polynôme est dit unitaire si son coefficient dominant est 1.
- Étant donné un entier $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_m[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à m. On dit qu'une formule de quadrature $I_n(f)$ est *exacte sur* $\mathbb{R}_m[X]$ si :
$$\forall P \in \mathbb{R}_m[X],\ e(P) = 0$$
ce qui signifie que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à m :
$$\int_I P(x)\ w(x)\ dx = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j\ P(x_j)$$
- Enfin, on appelle *ordre d'une formule de quadrature* $I_n(f)$ le plus grand entier $m \in \mathbb{N}$ pour lequel la formule de quadrature $I_n(f)$ est exacte sur $\mathbb{R}_m[X]$.
- Dans la suite, on note E l'ensemble des fonctions f continues de I dans $\mathbb{R}$ telles que $f^2\,w$ est intégrable sur I.

A - Étude d'un produit scalaire

1. Montrer que, pour toutes fonctions f et g de E, le produit $f\,g\,w$ est intégrable sur I.
On pourra utiliser l'inégalité : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ |ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, *après l'avoir justifiée.*

2. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Pour toutes fonctions f et g de E, on pose :
$$\langle f, g\rangle = \int_I f(x)\,g(x)\,w(x)\ dx$$

3. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

Dans la suite, on munit E de ce produit scalaire et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

B - Polynômes orthogonaux associés à un poids

- On suppose que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k w(x)$ est intégrable sur I. Cela entraîne par linéarité de l'intégrale que E contient toutes les fonctions polynomiales.
- On admet qu'il existe une unique suite de polynômes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
  (a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n est unitaire
  (b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(p_n) = n$,
  (c) la famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, autrement dit $\langle p_i, p_j\rangle = 0$, pour $i \neq j \in \mathbb{N}$.

  On dit que les (p_n) sont les *polynômes orthogonaux associés au poids w.*
- On s'intéresse aux racines des polynômes p_n.
- On rappelle que $\mathring{I}$ désigne l'intérieur de I, c'est-à-dire l'intervalle I privé de ses éventuelles extrémités.
On a donc $\mathring{I} =]a, b[$, où $a = \inf(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b = \sup(I) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $x_1, \dots, x_k$ les racines distinctes de p_n qui sont dans $\mathring{I}$ et $m_1, \dots, m_k$ leurs multiplicités respectives. On considère le polynôme
$$q(X) = \prod_{i=1}^{k} (X - x_i)^{\varepsilon_i},\ \text{avec } \varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si } m_i \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } m_i \text{ est pair} \end{cases}$$

4. En étudiant $\langle p_n, q\rangle$, montrer que p_n possède n racines distinctes dans $\mathring{I}$.

C - Applications : méthodes de quadrature de Gauss

- Considérons une formule de quadrature :

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \ f(x_j)$$

où $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ sont $n+1$ points distincts dans I.

- On suppose que les coefficients $(\lambda_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ sont choisis comme suit :

$$\forall j \in [\![0, n]\!],\ \lambda_j = \int_I L_j(x)\ w(x)\ dx$$

où $(L_0, \ldots, L_n)$ est la base de Lagrange associée aux points $(x_0, \ldots, x_n)$.
Autrement dit, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, L_i est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall j \in [\![0, n]\!],\ L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$$

- Ainsi, la formule $I_n(f)$ est d'ordre $m \geqslant n$. Nous allons montrer que dans ces conditions, il existe un unique choix des points $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ qui permet d'obtenir l'ordre m le plus elevé possible.

5. En raisonnant avec le polynôme $\prod_{i=0}^{n} (X - x_i)$, montrer que $m \leqslant 2n+1$.

6. Montrer que $m = 2n+1$ si et seulement si les x_i sont les racines de p_{n+1}.

D - Exemple 1

- On se place ici dans le cas où $I = [-1, 1]$ et $w(x) = 1$.
- On est donc bien dans les conditions d'application des résultats précédemment obtenus.

7. Déterminer les quatre premiers polynômes orthogonaux (p_0, p_1, p_2, p_3) associés au poids w.

8. En déduire explicitement une formule de quadrature d'ordre 5 (on déterminera les points x_j et les coefficients λ_j).

E - Exemple 2

- Dans cette sous-partie, $I =]-1, 1[$ et $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

9. Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k w(x)$ est intégrable sur I.

Cela entraîne que E contient toutes les fonctions polynomiales.
Dans la suite, on considère, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction :

$$Q_n : \left| \begin{array}{rcl} [-1, 1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(n \arccos(x)) \end{array} \right.$$

10. Calculer Q_0, Q_1 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer simplement Q_{n+2} en fonction de Q_{n+1} et Q_n.

11. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n est polynomiale et déterminer son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on notera également Q_n le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ qui coïncide avec $x \mapsto Q_n(x)$ sur $[-1, 1]$.

12. On note $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes orthogonaux associés au poids w. Montrer :

$$\begin{cases} p_0 = Q_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}\ Q_n \end{cases}$$

13. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer explicitement les points $(x_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ de I telle que la formule de quadrature $I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$ soit d'ordre maximal.

Exercice 25 *(d'après* `CCINP 2022 PSI`*)*

Présentation

- Ce problème s'intéresse dans la **partie I** à des propriétés des matrices de rang 1. Certaines de ces matrices sont ensuite utilisées dans la **partie II** pour construire des matrices orthogonales permettant dans la **partie III** de prouver l'existence d'une factorisation QR pour une matrice carrée quelconque.

Notations

- Pour tous $n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des matrices réelles carrées de taille n est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: on note également A l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui à X associe AX.
- Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, A^T désigne la matrice transposée de A.
- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe un entier $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que : $A^k = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.
- L'ensemble $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$.
- En identifiant $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, on a pour tous $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\langle X, Y \rangle = X^T Y \quad \text{et} \quad \|X\|^2 = \langle X, X \rangle$$

- On suppose dans tout ce problème que n est un entier tel que $n \geqslant 2$.

Partie I – Matrices de rang 1

I.1 – Une expression des matrices de rang 1

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.
Montrer qu'il existe $(X, Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ tels que : $A = XY^T$.

2. Réciproquement, soit $(X, Y) \in \left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}\right)^2$.
Montrer que la matrice $X\,Y^T$ est de rang 1.

I.2 – Quelques propriétés

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

3. Montrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A)\ A$.

4. En déduire, par récurrence sur k, une expression de A^k en fonction de A pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la trace de A pour que A soit nilpotente.

6. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la trace de A pour que A soit diagonalisable.

Partie II – Matrices de Householder

II.1 – Un exemple

- On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

7. Calculer A^2. En déduire un polynôme annulateur de A.

8. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

9. Montrer que les sous-espaces propres de A sont orthogonaux.

10. Déterminer une matrice $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, telles que : $P^T A P = D$.

11. Interpréter géométriquement l'endomorphisme A de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

II.2 – Matrices de Householder

- Soit $V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. On définit $(P_V, Q_V) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right)^2$ par :

$$P_V = \frac{1}{\|V\|^2} V V^T, \quad \text{et} \quad Q_V = \mathrm{I}_n - 2\ \frac{1}{\|V\|^2} V V^T \tag{1}$$

12. Montrer que $\mathrm{Im}(P_V) = \mathrm{Vect}\,(V)$ et que $\mathrm{Ker}(P_V) = \mathrm{Vect}\,(V)^\perp$.

13. Montrer que P_V est la projection orthogonale sur la droite $\mathrm{Vect}\,(V)$.
Préciser le rang et la trace de la matrice P_V.

14. Montrer que Q_V est symétrique et orthogonale.

15. Montrer que Q_V est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}\,(V)^\perp$.

Partie III – Factorisation QR

III.1 – Un résultat préliminaire

- Soient $(U,V)\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})^3$, tel que : $\|U\|=\|V\|$.
- On note : $D=\text{Vect}\,(U-V)$.

16. Montrer que $D^{\perp}$ est l'ensemble des $X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que :

$$\|X-U\|=\|X-V\|$$

17. Donner la décomposition de U sur la somme directe $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})=D\oplus D^{\perp}$.

18. On suppose U et V non colinéaires.
Calculer $Q_{U-V}U$ où Q_{U-V} est définie en (1).

19. En déduire que pour tout $\left(\tilde{U},\tilde{V}\right)\in\left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^2$, il existe une matrice orthogonale Q, telle que $Q\tilde{U}$ soit colinéaire à $\tilde{V}$.

III.2 – Factorisation QR

20. Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q_1, telle que Q_1A soit de la forme :

$$Q_1A=\begin{pmatrix}\alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}\qquad \text{où } \alpha\in\mathbb{R} \text{ et } C_1\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

21. En raisonnant par récurrence sur n, montrer que pour tout $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice Q orthogonale, telle que QA soit triangulaire supérieure.

Exercice 26 *(d'après* `Centrale 2018 - PSI`*)*

L'opérateur de Sylvester

- On définit les opérateurs :

$$\begin{array}{rccc}\mathcal{S} : & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ & X & \mapsto & NX-XN\end{array}\qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rccc}\mathcal{S}^* : & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ & X & \mapsto & {}^tNX-X{}^tN\end{array}$$

1. Montrer que le noyau de $\mathcal{S}$ est l'ensemble des matrices de Toeplitz réelles triangulaires inférieures.

On admet que le noyau de $\mathcal{S}^*$ est l'ensemble des matrices de Toeplitz réelles triangulaires supérieures.

2. Montrer que $\mathcal{S}(\Delta_{k+1})\subset\Delta_k$ et $\mathcal{S}^*(\Delta_k)\subset\Delta_{k+1}$.

- On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel défini par :

$$\forall (M_1,M_2)\in\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right)^2, \langle M_1,M_2\rangle=\text{tr}({}^tM_1M_2)$$

- On note $\mathcal{S}_{k+1}$ la restriction de $\mathcal{S}$ à Δ_{k+1} et $\mathcal{S}_k^*$ la restriction de $\mathcal{S}^*$ à Δ_k.

3. Vérifier que pour tous X dans Δ_{k+1} et Y dans Δ_k, $\langle\mathcal{S}_{k+1}X,Y\rangle=\langle X,\mathcal{S}_k^*Y\rangle$. En déduire que $\text{Ker}(\mathcal{S}_k^*)$ et $\text{Im}(\mathcal{S}_{k+1})$ sont supplémentaires orthogonaux dans Δ_k, c'est-à-dire :

$$\Delta_k=\text{Ker}(\mathcal{S}_k^*)\oplus^{\perp}\text{Im}(\mathcal{S}_{k+1})$$

4. Soient T une matrice triangulaire supérieure, $A=N+T$ et $k\geqslant 0$. Montrer que A est semblable à une matrice L dont tous les coefficients diagonaux d'ordre k sont égaux et vérifiant $\forall i\in[\![-1,k-1]\!]$, $L^{(i)}=A^{(i)}$.

5. En déduire que toute matrice cyclique est semblable à une matrice de Toeplitz.

Exercice 27 *(d'après* `CCINP 2021 - MP2`*)*

- Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel.
- On note $\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique définit par :

$$\forall (A,B) \in \Big(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\Big)^2,\ \langle A, B\rangle = \operatorname{tr}\left({}^t AB\right)$$

Déterminer $\Big(\mathscr{D}_n(\mathbb{R})\Big)^{\perp}$, l'orthogonal de $\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire.

Exercice 28 *(d'après* `CCINP 2019 - MP2`*)*

- Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- Pour tout $x \in E$, on note : $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.

1. Un endomorphisme u de E vérifiant :

$$\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = 0$$

est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?

2. Étant donné un endomorphisme u de E, on admet qu'il existe un unique endomorphisme v de E vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle \ = \ \langle x, v(y)\rangle$$

Démontrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

(i) $u \circ v = v \circ u$

(ii) $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), u(y)\rangle \ = \ \langle v(x), v(y)\rangle$

(iii) $\forall x \in E,\ \|\, u(x)\,\| \ = \ \|\, v(x)\,\|$.

(on pourra par exemple, successivement prouver les implications :
(i) ⇒ (ii), (ii) ⇒ (iii), (iii) ⇒ (ii) et (ii) ⇒ (i))

Exercice 29 *(d'après* `CCINP 2015 - MP1`*)*

- Toutes les fonctions étudiées dans ce problème sont à valeurs réelles. On pourra identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.
- On rappelle le théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[a,b]$: si f est une fonction continue sur $[a,b]$, il existe une suite de fonctions polynômes (P_n) qui conerge uniformément vers la fonction f sur $[a,b]$.

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On suppose que pour tout entier naturel k, $\displaystyle\int_a^b x^k\, f(x)\ dx = 0$.

1. ***a)*** Si P est une fonction polynôme, que vaut l'intégrale $\displaystyle\int_a^b P(x)\, f(x)\ dx$?

b) Démontrer, en utilisant le théorème de Weierstrass, que nécessairement f est la fonction nulle. On pourra utiliser sans le démontrer le résultat suivant : si (g_n) est une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction g sur une partie I de $\mathbb{R}$ et si f est une fonction bornée sur I, alors la suite de fonctions $(f \times g_n)$ converge uniformément sur I vers la fonction $f \times g$.

2. **Application**

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini pour tout couple (f,g) d'éléments de E par :

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\ dx$$

On note F le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes définies sur $[a,b]$ et $F^{\perp}$ l'orthogonal de F. Déterminer $F^{\perp}$. A-t-on $E = F \oplus F^{\perp}$?

Exercice 30 *(d'après* `CCINP 2018 - MP2`*)*

- On note E l'espace vectoriel des applications continues sur le segment $[-1,1]$ et à valeurs réelles.

1. Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant pour f et g éléments de E :

$$\langle f, g\rangle \ = \ \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t) \ dt$$

2. On note $u : t \mapsto 1$, $v : t \mapsto t$, et $F = \text{Vect}\,(u, v)$. Déterminer une base orthonormée de F.

3. Déterminer le projeté orthogonal de la fonction $w : t \mapsto \mathrm{e}^t$ sur le sous-espace F et en déduire la valeur du réel :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left(\int_{-1}^{1} \left(\mathrm{e}^t - (a + b\,t)\right)^2 \ dt\right)$$

On pourra simplifier les calculs en utilisant le théorème de Pythagore.