Calculs pratiques

Exercice 1

Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants.

a) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \sin(a) & \sin(b) & \sin(c) \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$

Exercice 2. *Identité de Lagrange*

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Calculer de deux façons différentes : $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix}$

Reconnaissez-vous cette égalité ?

Exercice 3

a) Calculer $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

b) En déduire $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}$ où, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} i$.

Indication : on pourra commencer par effectuer l'opération $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$.

Exercice 5

Calculer les déterminants de taille n suivants :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & (0) \\ 1 & (0) & 1 \end{vmatrix} \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Déterminant et matrice

Exercice 6

a) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\overline{A} = (\overline{a}_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Former une relation liant $\det(A)$ et $\det(\overline{A})$.

b) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $A^T = \overline{A}$. Démontrer : $\det(A) \in \mathbb{R}$.

Exercice 7

Soit A une matrice antisymétrique réelle d'ordre $2n+1$.
Démontrer : $\det(A) = 0$. Ce résultat est-il encore vrai lorsque A est d'ordre pair ?

Exercice 8

Montrer que le déterminant d'une matrice nilpotente est nul.

Autour du déterminant de Vandermonde

Exercice 9
Soit $(a,b,c)\in\mathbb{K}^3$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le système (d'inconnues x,y,z) suivant admette une unique solution. Donner la le cas échéant.

$$\begin{cases} x + a\,y + a^2\,z = a^4 \\ x + b\,y + b^2\,z = b^4 \\ x + c\,y + c^2\,z = c^4 \end{cases}$$

Exercice 10
Calculer le déterminant de la matrice $\left(i^j\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Exercice 11. *Déterminant de Vandermonde lacunaire*
Soit $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$.

1. Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & {x_1}^{n-2} & {x_1}^n \\ 1 & x_2 & \cdots & {x_2}^{n-2} & {x_2}^n \\ 1 & x_3 & \cdots & {x_3}^{n-2} & {x_3}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & {x_n}^{n-2} & {x_n}^n \end{vmatrix}$$

2. Si $k\in[\![1,n]\!]$, généraliser à :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & {x_1}^{k-1} & {x_1}^{k+1} & \cdots & {x_1}^n \\ 1 & x_2 & \cdots & {x_2}^{k-1} & {x_2}^{k+1} & \cdots & {x_2}^n \\ 1 & x_3 & \cdots & {x_3}^{k-1} & {x_3}^{k+1} & \cdots & {x_3}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_n & \cdots & {x_n}^{k-1} & {x_n}^{k+1} & \cdots & {x_n}^n \end{vmatrix}$$

Exercice 12
Dans les trois cas, montrer que la famille L est une famille libre de E à l'aide d'un déterminant de Vandermonde.

1. $L=((X+a_k)^n)_{k\in[\![0,n]\!]}$ dans $E=\mathbb{K}_n[X]$ où a_0, …, a_n sont des scalaires deux à deux distincts.

2. $L=\left(x\mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}\right)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ dans $E=\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

3. $L=(x\mapsto \sin(\lambda x))_{\lambda\in\mathbb{R}_+^*}$ dans $E=\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 13
Soit $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(x_1) & \cos(2x_1) & \cdots & \cos((n-1)x_1) \\ 1 & \cos(x_2) & \cos(2x_2) & \cdots & \cos((n-1)x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos(x_n) & \cos(2x_n) & \cdots & \cos((n-1)x_n) \end{vmatrix}$$

Déterminant et endomorphisme

Exercice 14
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant : $f^2 = -\mathrm{id}_E$.
Montrer que l'espace vectoriel E est de dimension paire.

Exercice 15
On note : $V = \{x \mapsto \mathrm{e}^x\, P(x) \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

a) Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension.

b) Montrer que l'application $D : f \to f'$ est un endomorphisme de V dont on calculera le déterminant.

Exercice 16
Dans chacun des cas suivants, calculer $\det(f)$ où f est l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par :

1. $f : P \mapsto P + P'$

2. $f : P \mapsto P(X+1) - P(X)$

3. $f : P \mapsto X\,P'(X) + P(1)$

Exercice 17
Soit Φ l'application qui à toute fonction f de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ associe la fonction $\Phi(f)$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(f) : x \mapsto \int_x^{x+1} f(t)\ dt$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application Φ induit un endomorphisme Φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Calculer le déterminant de Φ_n.

Vers la deuxième année

Exercice 18
On note : $E = \mathbb{R}^3$. On note de plus $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.
On note enfin f l'endomorphisme de E dont la matrice associée dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) On note χ_A le polynôme $\chi_A(X) = \det(A - X\,I_3)$. Expliciter ce polynôme et déterminer ses racines.

b) Déterminer une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 19. *Matrice compagnon et polynôme caractéristique*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$ de degré n. Alors il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$P(X) = a_0 + a_1\,X + \dots + a_{n-1}\,X^{n-1} + X^n$$

On note :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On dit que la matrice C est la *matrice compagnon* de P.
On note χ_C le polynôme $\chi_C(X) = \det(X\,I_n - C)$. Expliciter χ_c.

Exercice 20. *Déterminant circulant*
Soit $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On note f l'endormphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice associée dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est :

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

1. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, notons $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ et $C_k = \begin{pmatrix} 1 & \omega_k & {\omega_k}^2 & \cdots & \omega^{n-1} \end{pmatrix}$. Montrer que $(C_0, \ldots, C_{n-1})$ est une base de $\mathbb{C}^n$.

2. Donner la matrice de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M dans cette nouvelle base. On pourra introduire le polynôme $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

3. En déduire le déterminant de M en fonction de P et des ω_k.

4. ***a)*** Montrer : $1 - X^n = \prod\limits_{k=0}^{n-1} (1 - X\omega_k)$.

b) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{C}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & \cdots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a^2 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (1 - a^n)^{n-1}$$