Loi d'une v.a.

Exercice 1

Dans chacune des expériences suivantes, reconnaître la loi de X.

1. On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs. On note X la v.a. égale au nombre d'objets dans le premier tiroir.
2. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos. On note X la v.a. égale au nombre de bosses de l'animal sorti de l'enclos.
3. On prend un jeu de 32 cartes mélangées. On retourne une par une les cartes jusqu'à l'apparition de l'as de coeur. On note X la v.a. égale au nombre de cartes retournées.
4. On suppose que la probabilité de naissance d'un garçon et d'une fille sont identiques. On note X la v.a. égale au nombre de garçons dans une famille de 3 enfants.

Exercice 2

- On lance indéfiniment un dé à 6 faces.
  Les lancers sont indépendants et le dé n'est pas pipé.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire égale à la valeur obtenue au $k^{\text{ème}}$ lancer.
- Si X est une variable aléatoire réelle, on appelle fonction de répartition de X et on note F_X :

$$\begin{array}{rccl} F_X & : & x & \mapsto & \mathbb{P}\big(\{X \leqslant x\}\big) \\ & & \mathbb{R} & \to & [0,1] \end{array}$$

1. Déterminer la loi de X_k et la fonction de répartition F associée à X_k.
2. On note Z_n la valeur maximale obtenue au bout de n lancers.
   Déterminer la fonction de répartition F_n de Z_n en fonction de F.
3. Déterminer la limite de (F_n) lorsque n tend vers l'infini.
4. On note Y_n la valeur minimale obtenue au bout de n lancers.
   Déterminer sa fonction de répartition.

Exercice 3

- On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue n tirages successifs sans remise.
- Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:
  - × on note X_k la variable aléatoire qui prend pour valeur le numéro de la boule tirée à la $k^{\text{ème}}$ étape.
  - × on dit qu'il y a un pic à la $k^{\text{ème}}$ étape si $X_k > \max\big(X_1, \dots, X_{k-1}\big)$.
  - × on note T_k la variable indicatrice de l'événement : il y a un pic au $k^{\text{ème}}$ tirage. *(T_k prend la valeur 1 s'il y a un pic au $k^{\text{ème}}$ tirage et la valeur 0 sinon)*

  On convient qu'il y a toujours un pic au premier tirage.
- On note S_n le nombre de pics au cours des n tirages.

1. Déterminer $\mathbb{P}\big(\{S_n = 1\}\big)$ et $\mathbb{P}\big(\{S_n = n\}\big)$.
2. Déterminer la loi de T_k.
3. Donner l'espérance de S_n.

Exercice 4

On joue avec une pièce donnant pile avec probabilité $p \in]0,1[$, en effectuant des lancers mutuellement indépendants.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n lancers de cette pièce. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}\big)$.
On note X la v.a. réelle égale au rang du premier pile. Notons qu'il est possible de ne jamais obtenir pile au cours des n lancers. Dans ce cas, la v.a. X prend la valeur $n+1$.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Quelles en sont les limites pour $n \to +\infty$?

Calculs d'espérances

Exercice 5
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big) = a\binom{n}{k}$$

Calculer l'espérance et la variance de X.
On pourra commencer par déterminer a.

Exercice 6
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0,1$. Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Calculer l'espérance de la variable $Y = \dfrac{1}{X+1}$.

Exercice 7
Dans une urne contenant n boules blanches et n boules rouges, on prélève successivement et sans remise les boules. On note X la v.a.r. égale au nombre de tirages juste nécessaire à l'obtention de toutes les boules rouges.

1. Déterminer la loi de X.

2. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 8
Dans tous les cas, les v.a. réelles sont définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}\big)$ à univers fini. Les questions ci-dessous sont indépendantes.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit T une v.a.r. de loi $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$. Calculer l'espérance de $T^3 - T^2 + 1$.

2. Autour d'une table, 6 personnes lancent un dé équilibré. Les lancers sont mutuellement indépendants. Quels sont l'espérance et l'écart-type du nombre de 6 obtenus ?

3. Proposer une v.a.r. d'espérance 1 et de variance 2.

Exercice 9
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}\big)$ un espace probabilisé. On considère n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ qui constituent un échantillon iid. Autrement dit, les v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$ sont **i**ndépendantes et de même loi (**i**dentiquement **d**istribuées). La moyenne empirique de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ est la v.a.r. définie par :

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

1. Démontrer : $\mathbb{E}\big(\overline{X}_n\big) = \mathbb{E}(X_1)$.

2. Démontrer : $\mathbb{E}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \big(X_k - \overline{X}_n\big)^2\right) = (n-1)\,\mathbb{V}(X_1)$.

Exercice 10

1. **Une identité utile**. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}\big)$ un espace probabilisé et X une v.a. telle que : $X(\Omega) \subset [\![0,n]\!]$. Démontrer :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{X \geqslant k\}\big)$$

2. **Application 1** : premier instant de stagnation.
On effectue n tirages avec remise d'une boule dans une urne où les boules sont numérotées de 1 à n. Chaque tirage est uniforme étant donné la composition de l'urne à ce moment.
On note X la v.a. égale au premier instant où le numéro tiré est inférieur ou égal au numéro précédent. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}\big)$. Déterminer l'espérance de X.

3. **Application 2** : loi d'un minimum.
On lance n dés équilibrés de manière indépendante. On note X_n la v.a. égale au minimum des numéros obtenus, et Y_n la v.a. égale au maximum des numéros obtenus. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}\big)$.
Déterminer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{E}(Y_n)$. Que remarque-t-on lorsque n tend vers $+\infty$?

Couples de v.a.

Exercice 11

Soit (X,Y) un couple de v.a.r. dont la loi jointe est donnée par le tableau suivant.

1. Déterminer les lois marginales du couple (X,Y).

2. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?

3. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

4. Déterminer les lois de $U = XY$ et $V = \inf(X,Y)$.

5. Déterminer la loi jointe du couple (U,V).

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue deux tirages successifs avec remise. On note X le plus petit des deux numéros obtenus, et Y le plus grand.

1. Déterminer la loi de (X,Y).

2. En déduire celles de X et de Y.

3. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 13

On lance n dés équilibrés de manière indépendante. On observe les dés ayant donné 6, puis on relance uniquement les dés n'ayant pas donné 6. On note X le nombre de dés ayant donné 6 au premier lancer et Y le nombre de dés ayant donné 6 au total.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.

2. Calculer $\mathbb{P}\big(\{Y=k\} \mid \{X=i\}\big)$. En déduire la loi de Y et son espérance.

3. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 14

On lance 3 fois une pièce équilibrée. On note X la v.a.r. égale à 1 si le premier lancer donne pile, et 0 sinon. On note Y la v.a.r. égale au nombre de faces obtenus.

1. Déterminer les lois conjointes et marginales de (X,Y).

2. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 15

On considère n cartes numérotées de 1 à n. On permute au hasard les cartes de jeu et on note Y la v.a.r. égale au nombre de cartes qui occupent leur place naturelle (on dit que la carte numéro k est à sa place si c'est la $k^{\text{ème}}$ en partant du haut du paquet). Soit X_k la v.a.r. qui vaut 1 si la $k^{\text{ème}}$ carte est à sa place et 0 sinon.

1. Donner un lien entre Y et les X_1,...X_n.

2. Montrer que $E(Y) = 1$.

Exercice 16

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une boîte contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire un jeton au hasard, on note son numéro et on le remet dans la boîte.
Si le numéro est i, alors on tire i jetons sans remise et on les distribue au hasard dans trois boîtes U_1, U_2, U_3. On note X_k la v.a.r. égale au nombre de jetons dans l'urne k L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}\big)$.

1. On note X la v.a.r. égale au numéro du jeton qu'on a tiré au début. Donner la loi de X.

2. Pour tout $k \in [\![1,3]\!]$, donner la loi du couple (X, X_k).

3. Soit $k \in [\![1,3]\!]$. Calculer $\mathbb{E}(X_k)$.
On pourra remarquer que les urnes jouent un rôle symétrique.

4. Loi du triplet (X_1, X_2, X_3).

  a) Déterminer la loi de (X_1, X_2, X).

  b) En déduire la loi de (X_1, X_2, X_3).

5. Soit $k \in [\![1,3]\!]$. On définit : $Y_k = \dfrac{X_k}{X}$. Calculer les espérances de Y_k et Y_k^2.

6. Donner un équivalent de la variance de Y_k lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 17
Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. On considère, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$, deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes, représentant chacune le résultat d'un dé équilibré à n faces. On fixe $a \in [\![1, n]\!]$.
Considérons la v.a.r. Y définie par :

$$Y : \omega \mapsto \begin{cases} X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega) \leqslant a \\ X_2(\omega) & \text{si } X_2(\omega) > a \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de Y.

2. Calculer l'espérance de Y et la comparer avec $\mathbb{E}(X_1)$.

3. Quelle valeur de a choisir pour maximiser $\mathbb{E}(Y)$?

Exercice 18
Soit $n \in [\![3, +\infty]\!]$. Soit $p \in]0, 1[$. Soient Y et Z deux v.a. indépendantes de même loi $\mathcal{B}(n, p)$.
On pose : $S = Y + Z$ et $T = Y - Z$.

1. Déterminer $\mathrm{Cov}(S, T)$.

2. Les variables aléatoires S et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 19
On considère un nombre entier n supérieur ou égal à 2 et une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On extrait de cette urne, successivement et sans remise, deux jetons. La v.a. X_1 désigne le numéro du premier jeton, X_2 celui du $2^{\text{ème}}$.

1. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).

2. Calculer la covariance de X_1 et X_2.

3. Calculer $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$.

Exercice 20
Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Une urne contient une boule noire et $(n-1)$ boules blanches. On effectue des tirages successifs de la manière suivante : le premier tirage s'effectue sans remise, le second avec remise, le troisième sans remise, etc. jusqu'à vider l'urne. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la v.a. qui prend la valeur 1 si la boule noire est tirée au $k^{\text{ème}}$ tirage (pour la première fois ou non) et 0 sinon. On note X le nombre de fois où on obtient la boule noire sur la totalité du processus et Y le premier instant où on la tire.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de X_k.

2. Déterminer la loi de Y.

3. Calculer $\mathbb{P}\big(\{X = 1\}\big)$ et $\mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)$.

4. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
On pourra calculer $\mathrm{Cov}(X_i, X_{i+j})$ *en discutant selon la parité de* i.

Marches aléatoires

Exercice 21
Un individu, armé d'une pièce de paramètre $p \in]0, 1[$, adopte une drôle de façon de se déplacer. À chaque pas, il lance sa pièce. Si celle-ci donne pile, il fait un bond d'un mètre. Sinon il fait un bond de deux mètres. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le nombre moyen de mètres effectués au bout de n bonds de la sorte.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note Y_n la v.a. égale au nombre de bonds pour atteindre exactement une distance de n mètres.

a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\big(\{Y_n = k\}\big) = p\,\mathbb{P}\big(\{Y_{n-1} = k-1\}\big) + (1-p)\,\mathbb{P}\big(\{Y_{n-2} = k-1\}\big)$$

b) En déduire $\mathbb{E}(Y_n)$.

Exercice 22
Soit $p \in]0,1[$. Une particule effectue un mouvement aléatoire sur un axe horizontal, gradué de 1 en 1, de $-\infty$ à $+\infty$. À chaque étape, la particule peut se déplacer de $+1$ avec probabilité p et de -1 avec probabilité $1-p$. Initialement, la particule part de 0 et les sauts sont mutuellement indépendants. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}\big)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la position de la particule après n étapes.

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

2. Pour quelle valeur de p la v.a. X_n est-elle centrée ?

3. Dans cette question, on suppose : $p \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

   a) Comparer, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, les quantités $\mathbb{P}\big(\{X_n \leqslant 0\}\big)$ et $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-t\,X_n}\right)$.
   On pourra utiliser l'inégalité de Markov.

   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}\big(\{X_n \leqslant 0\}\big) \;\leqslant\; \left(2\sqrt{p\,(1-p)}\right)^n$$

   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n la position la plus basse occupée par la particule entre les étapes 0 et n incluses. Exprimer Z_n en fonction de X_1, ..., X_n et démontrer :

$$\frac{\mathbb{E}(Z_n)}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Inégalité de Markov

Exercice 23 *(d'après* `Centrale-1 2022 - PSI`*)*

- On suppose que n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
- On désigne par I un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ ayant au moins deux éléments et par $u = (u_i)_{i \in I}$ une suite de vecteurs unitaires de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que le nombre réel :

$$C(u) = \sup\left\{ |\langle u_i \mid u_j \rangle| \,,\, (i,j) \in I^2,\, i \neq j \right\}$$

existe et appartient à l'intervalle $[0,1]$.
$C(u)$ s'appelle paramètre de cohérence de la suite $(u_i)_{i \in I}$.

2. Montrer que si $C(u) = 0$, alors l'ensemble $\{u_i,\, i \in I\}$ est fini et donner un majorant de son cardinal.
On se propose de démontrer que, pour tout entier naturel N inférieur ou égal à $\exp\left(\dfrac{\varepsilon^2 n}{4}\right)$, il existe une famille u de N vecteurs unitaires de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $C(u) \leqslant \varepsilon$ où ε est un nombre réel de l'intervalle $[0,1]$.
On dit alors que u est une famille « presque orthogonale ».

3. Démontrer que, pour tout nombre réel t, $\operatorname{ch}(t) \leqslant \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$.

Soient $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $\mathscr{R}$ (définie dans la sous-partie II.B). On définit les vecteurs aléatoires, $X = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(X_1, \ldots, X_n)^\top$ et $Y = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(Y_1, \ldots, Y_n)^\top$ à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

4. Démontrer que, pour tout nombre réel t :

$$\mathbb{E}\big(\exp(t\langle X \mid Y \rangle)\big) = \left(\operatorname{ch}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$$

5. En déduire que, pour pour tout nombre réel t :

$$\mathbb{E}\big(\exp(t\langle X \mid Y \rangle)\big) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2n}\right).$$

Soient σ et λ deux nombres réels strictement positifs et Z une variable aléatoire réelle telle que $\exp(tZ)$ est d'espérance finie et vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\big(\exp(tZ)\big) \leqslant \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

6. En appliquant l'inégalité de Markov à une variable aléatoire bien choisie, démontrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \mathbb{P}\big(\{Z \geqslant \lambda\}\big) \leqslant \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t\right)$$

7. En déduire que

$$\mathbb{P}\big(\{|Z| \geqslant \lambda\}\big) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right)$$

8. Avec les notations et les hypothèses de la question 39 , démontrer que

$$\mathbb{P}\big(\{|\langle X \mid Y\rangle| \geqslant \varepsilon\}\big) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right).$$

N étant un entier naturel non nul, $\left(X_j^i\right)_{1\leqslant i\leqslant N, 1\leqslant j\leqslant n}$ est une famille de $n \times N$ variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes de même loi $\mathscr{R}$. Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, on pose $X^i = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(X_1^i, \dots, X_n^i)^\mathsf{T}$.

9. Déduire des questions précédentes que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant N(N-1)\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right).$$

10. On suppose que $n \geqslant 4\dfrac{\ln N}{\varepsilon^2}$. Démontrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| \geqslant \varepsilon\right) < 1.$$

11. En déduire que, pour tout entier naturel N inférieur ou égal à $\exp\left(\dfrac{\varepsilon^2 n}{4}\right)$, il existe une famille de N vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ dont le paramètre de cohérence est majoré par ε.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 24
Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Démontrer :

$$\mathbb{P}\left(\left\{\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right\}\right) \leqslant \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}$$

Exercice 25
Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$ où $p \in\,]0,1[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $Y_n = X_n\, X_{n+1}$.

1. Déterminer la variance de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

2. Démontrer, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\left\{\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right\}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Fonction génératrice (des probabilités)

Exercice 26 *(d'après* `CCINP-1 2019 - MP`*)*
Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)$, la fonction génératrice de X est :

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, t^n$$

1. Démontrer que l'intervalle $]-1,1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de la fonction G_X.

2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On pose $S = X_1 + X_2$, démontrer :

$$\forall t \in\,]-1,1[,\ G_S(t) = G_{X_1}(t).G_{X_2}(t)$$

On généralise ce résultat, que l'on pourra utiliser dans la question suivante, à n variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ (on ne demande pas de preuve de cette récurrence).

3. Un sac contient quatre boules :

× une boule numérotée 0,
× deux boules numérotées 1,
× et une boule numérotée 2.

On effectue n tirages d'une boule avec remise et on note S_n la somme des numéros tirés.
Déterminer pour tout $t \in]-1,1[$, $G_{S_n}(t)$ et en déduire la loi de S_n.

Exercice 27 *(d'après* `CCINP 2020 - PC`*)*

- Dans cet exercice, nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant dans l'ensemble des entiers relatifs.
- À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve en 0. Ensuite, si le pion se trouve à l'étape n sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$, alors à l'étape $n+1$, le pion a une chance sur 2 de se trouver en $x+1$ et une chance sur deux de se trouver en $x-1$, ceci indépendamment des mouvements précédents.
- Pour modéliser cette situation, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big(\{X_k = 1\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X_k = -1\}\big) = \frac{1}{2}$$

- On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

- L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire T définie de la façon suivante :
  × si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n \neq 0$, on pose $T = +\infty$;
  × sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$.
- L'événement $\{T = +\infty\}$ se réalise donc si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$ est vide.
  Finalement, on définit les suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \mathbb{P}\big(\{S_n = 0\}\big) \quad \text{et} \quad q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ P(T = n) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

1. Que représente la variable aléatoire S_n ?

2. Calculer p_0, p_1 et p_2.

3. Justifier que, si n est impair, alors on a $p_n = 0$.

On considère pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k = \frac{X_k+1}{2}$. On admet que $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

5. Pour $n > 0$, donner la loi de $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ et exprimer S_n en fonction de Z_n.

6. On suppose que $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$.
Déduire de la question précédente :

$$p_{2m} = \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m}$$

Fonction génératrice des moments

Exercice 28 *(d'après* `CCINP 2018 - PSI`*)*

Notations et définitions

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.
- Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, on note $\mathbb{E}(X)$ cette espérance.
- Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
- Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $[-1, 1]$.
- On considère dans ce problème une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires *discrètes* sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, *mutuellement indépendantes et de même loi que* X.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

Objectif

Montrer que si la variable aléatoire X est centrée, $(\mathbb{E}(X) = 0)$, alors la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement vers la constante 0. Il s'agit d'un cas particulier de la loi forte des grands nombres.

1. On ne suppose pas X centrée dans cette question.
Montrer que X admet une espérance.

On suppose désormais que X est *centrée.*

2. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire finie Y sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Montrer que ce résultat est encore vrai lorsque Y est une variable aléatoire discrète non nécessairement finie.

3. En déduire que, pour tout $\alpha > 0$:

$$\mathbb{P}\big(|X| \geqslant \alpha\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}\big(|X|\big)}{\alpha}$$

4. Montrer que, pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}\big(S_n \geqslant \varepsilon\big) = \mathbb{P}\big(\mathrm{e}^{tnS_n} \geqslant \mathrm{e}^{tn\varepsilon}\big) \leqslant \frac{\big(\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big)\big)^n}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}}$$

Majoration de $\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big)$

5. Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_a(x) = \frac{1-a}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x.$$

Montrer que la fonction g_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction g_a' est décroissante sur $\mathbb{R}$. En déduire, en remarquant que $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $g_a(x) \geqslant 0$.

6. En déduire :

$$\forall t > 0,\ \forall x \in [-1, 1],\ \mathrm{e}^{tx} \leqslant \frac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+x}{2}\mathrm{e}^{t}$$

7. En déduire :

$$\forall t > 0,\ \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big) \leqslant \mathrm{ch}(t)$$

8. Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k$$

En déduire :

$$\forall t > 0,\ \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big) \leqslant \mathrm{e}^{t^2/2}$$

Majoration de $\mathbb{P}\big(\{|S_n| \geqslant \varepsilon\}\big)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

9. Montrer que la fonction :

$$\begin{array}{ccc} t & \mapsto & \mathrm{e}^{-nt\varepsilon + nt^2/2} \\ \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

atteint un minimum en un point que l'on précisera.

10. En déduire que $\mathbb{P}\big(\{S_n \geqslant \varepsilon\}\big) \leqslant e^{-n\varepsilon^2/2}$, puis :

$$\mathbb{P}\big(\{|S_n| \geqslant \varepsilon\}\big) \leqslant 2\mathrm{e}^{-n\varepsilon^2/2}$$

Conclusion

11. Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $\mathbb{P}\big(\{|S_n| > \varepsilon\}\big)$ converge.

12. On fixe un réel $\varepsilon > 0$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n(\varepsilon) = \bigcup_{m \geqslant n} \{\omega \in \Omega \; ; \; |S_m(\omega)| > \varepsilon\}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\varepsilon > 0$, $B_n(\varepsilon)$ est un événement est que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)\right) = 0$.

13. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\Omega_k = \left\{\omega \in \Omega \; ; \; \exists n \in \mathbb{N}^*, \; \forall m \geqslant n, \; |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\right\}$$

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Ω_k est un événement.

Écrire l'ensemble $A = \left\{\omega \in \Omega \, ; \, \lim\limits_{n \to \infty} S_n(\omega) = 0\right\}$ à l'aide des événements Ω_k, $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que A est un événement.

14. Déduire des questions précédentes que $\mathbb{P}(A) = 1$.