Matrice d'une application linéaire

Exercice 1. *Matrice d'un application linéaire*
Dans chaque cas, déterminer la matrice de f dans la base canonique des espaces considérés puis préciser si f est bijective.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P+P' \end{array}$

2. $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (a+b-c, a+d) \end{array}$

Exercice 2
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$. On pose $u = (2, 4, -5)$, $v = (1, 0, 1)$, $w = (0, 1, -2)$.

1. Calculer $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$.

2. Montrer que $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}'$.

3. Calculer A'^2 et en déduire f^2

Exercice 3
On note $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Soit f l'application qui à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ associe $f(M) = M + (a+d)I_2$.

1. Montrer f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer la matrice A de f dans la base (J_1, J_2, J_3, J_4).

3. ***a)*** Montrer que $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I_2)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
b) Déterminer la matrice D de f dans cette base.

4. Montrer que f est un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 4
Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ par $\begin{cases} \varphi(e_i) = e_{i+1} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant 3 \\ \varphi(e_4) = e_1 \end{cases}$

1. Déterminer la matrice A de φ dans la base $\mathscr{B}$ puis calculer A^4.

2. En déduire que φ est un automorphisme et déterminer φ^{-1}.

Exercice 5
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est A.

1. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$ puis en déduire $\mathrm{Ker}(f)$.

2. Calculer f^4.

3. On note $\varepsilon_1 = e_1$, $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_1)$, $\varepsilon_3 = f(\varepsilon_2)$, $\varepsilon_4 = f(\varepsilon_3)$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$.
a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
b) Déterminer la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$.

4. Existe-t-il un automorphisme g de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ tel que $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$?

Exercice 6

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\varphi : P(X) \mapsto (1 - X^2)P''(X) - 3XP'(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Calculer $\varphi(1)$. L'endomorphisme φ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?

3. Dans cette question, on prend $n = 3$.
a) Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
b) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$ et une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Exercice 7

On considère l'espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ avec :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\begin{array}{rccc} f : & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ & M & \mapsto & {}^tM \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} g : & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ & M & \mapsto & M + {}^t M \end{array}$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ et $g \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$.
2. Déterminer la matrice A de f relativement à la base $\mathscr{B}$.
3. En déduire sans calcul supplémentaire la matrice de g relativement à la base $\mathscr{B}$.
4. Les applications f et g sont-elles des automorphismes ? Si oui, déterminer l'application réciproque.
5. Si a et b sont deux automorphismes, est-ce que $a + b$ est également un automorphisme ?

Exercice 8

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. On considère les vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ définis par $u = (0, 1, -2)$ et $v = (0, 1, -1)$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Justifier de deux manières différentes que f n'est pas bijectif.
3. Montrer que (v) est une base de $\mathrm{Ker}(f - id)$
4. Déterminer un vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la 3ème coordonnée (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) est nulle, tel que la famille $C = (u, v, w)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice de f dans la base C soit la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5. Dans cette question, on suppose qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $g \circ g = f$.
   a) Montrer que $f \circ g = g \circ f$.
   b) En déduire que $f(g(u)) = 0$ et $f(g(v)) = g(v)$.
   c) Justifier qu'il existe deux réels a et b tels que $g(u) = au$ et $g(v) = bv$.
   d) On note N la matrice de g dans la base $C = (u, v, w)$ définie à la question 4.. Justifier que $N = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$, où a et b sont les deux réels définis à la question précédente, et c, d et e des réels.
6. Existe-t-il des endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ tels $g \circ g = f$?
   Indication : Utiliser les matrices de f et g dans la base $C = (u, v, w)$.

Exercice 9

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $f \circ f = 0$.
2. Sans calcul, déterminer si f est bijectif.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(f)$.
4. En déduire les dimensions de ces 2 espaces vectoriels.
5. Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
6. Soit $u \notin \mathrm{Ker}(f)$ et $v \in \mathrm{Ker}(f)$.
   a) Montrer que la famille $(u, f(u))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.
   b) Montrer que la famille $(u, f(u), v)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   c) Déterminer la matrice de f dans la base $(u, f(u), v)$.

Généralités sur les applications linéaires

Exercice 10

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathscr{B}$.
On note P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite définie par le système d'équations $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\,z \\ y=\frac{3}{2}\,z \end{array}\right.$.

1. Vérifier que $P \oplus D = \mathbb{R}^3$.

On note p la projection sur P parallèlement à D.

2. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
Calculer $p(u)$ et déterminer la matrice de p dans $\mathscr{B}$.

Exercice 11

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Montrer :

$$\Big(\exists u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n),\ \mathrm{Im}(u)=F \text{ et } \mathrm{Ker}(u)=G\Big) \Leftrightarrow \dim(F)+\dim(G)=n$$

2. **Exemple**.
Dans $\mathbb{R}^3$, F est le plan d'équation $x+y+z=0$ et $G=\mathrm{Vect}\,((1,-1,0))$.
a) Déterminer un endomorphisme u dont l'image est F et le noyau est G.
b) Exprimer la matrice de u dans la base canonique.

Projecteurs et symétries

Exercice 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E ($E=F\oplus G$).

Pour tout élément $x\in E$, on note $(x_F,x_G)\in F\times G$ l'unique couple de vecteurs tel que $x=x_F+x_G$. On appelle alors projection sur F parallèlement à G, l'application p définie par :

$$p \;:\; \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F \end{array}$$

On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G, l'application s :

$$s \;:\; \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F - x_G \end{array}$$

1. *a)* Démontrer : $p\circ p = p$ *(on dit que p est idempotente).*
b) Démontrer : $F=\mathrm{Im}(p)$ et $G=\mathrm{Ker}(p)$.
c) On note $q=\mathrm{id}_E - p$. Démontrer que q est un projecteur.
d) Soit $f\in\mathscr{L}(E)$. Démontrer :

$$f\circ f = f \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} E=\mathrm{Im}(f)\oplus\mathrm{Ker}(f) \\ f \text{ est le projecteur sur } \mathrm{Im}(f) \text{ parallèlement à } \mathrm{Ker}(f) \end{array}\right.$$

2. *a)* Démontrer : $s\circ s=\mathrm{id}_E$ *(on dit que s est involutive).*
b) Démontrer : $F=\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_E)$ et $G=\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E)$.
c) Démontrer : $s=2\,p-\mathrm{id}_E = p-q$.
d) Soit $g\in\mathscr{L}(E)$. Démontrer :

$$g\circ g=\mathrm{id}_E \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} E=\mathrm{Ker}(g-\mathrm{id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(g+\mathrm{id}_E) \\ g \text{ est la symétrie par rapport à } \mathrm{Ker}(g-\mathrm{id}_E) \\ \text{parallèlement à } \mathrm{Ker}(g+\mathrm{id}_E) \end{array}\right.$$

3. *a)* Démontrer : $\mathrm{Ker}(p)=\mathrm{Im}(\mathrm{id}_E-p)$.
b) Démontrer : $\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E-p)$.

4. On note $\mathscr{B}_F$ une base de F et $\mathscr{B}_G$ une base de G. On note enfin $\mathscr{B}$ la famille obtenue par concaténation des bases $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$.
a) Démontrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.
b) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(q)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s)$.

Exercice 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

On considère p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer : $p+q$ est un projecteur de $E \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2. On suppose dans cette question que $p+q$ est un projecteur de E.
Montrer :

$$\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$$

$$\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0_E\}$$

$$\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$$

Matrices semblables - Changement de base

Exercice 14

Montrer que les matrices A et B ci-dessous sont semblables, et que les matrices C et D ne le sont pas, où :

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 18 \\ -6 & -7 & -9 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Trouver les matrices $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A)$.

Exercice 16

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que ces deux matrices sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 17

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soient f et g deux endomorphismes de E tels que :

$$f^2 = g^2 = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g + g \circ f = 0$$

1. Montrer que la dimension de E est paire.

2. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 18

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{tr}(A) = 1$.

Montrer : $A^2 = A$.

Sous-espaces stables

Exercice 19

Soit H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer : u stabilise $H \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id}_E) \subset H$.

2. On suppose dans cette question qu'il existe une base $\mathscr{B}$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver tous les sous-espaces stabilisés par u.

Exercice 20

On note $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associée à la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer : $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(f^2) \oplus \operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{id})$.
Donner alors un élément de $\operatorname{Ker}(f^2) \setminus \operatorname{Ker}(f)$.

2. Montrer que M est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$. On suppose : $g^2 = f$.

a) Montrer que $\operatorname{Ker}(f^2)$ est stable par g.

b) En déduire qu'un tel g n'existe pas.

Exercice 21

Notons $\mathscr{G} = \{u \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) \mid \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), u({}^tM) = {}^t(u(M))\}$.

1. Montrer que $\mathscr{G}$ est un espace vectoriel.

2. Montrer que les éléments de $\mathscr{G}$ sont les éléments de $\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ qui stabilisent $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. En déduire la dimension de $\mathscr{G}$.

Énoncés de concours

Exercice 22 `(Centrale 2019 - M2)`

Notations et rappels

- Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.
- Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note M^T la transposée de M.
- Si M est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la suite des puissances de M par $M^0 = I_n$ et, pour tout entier naturel k, par la relation $M^{k+1} = M\,M^k$.
- De même, si u est un endomorphisme de E, on définit la suite des puissances de u par $u^0 = \mathrm{id}_E$ et, pour tout entier naturel k, par la relation $u^{k+1} = u \circ u^k$.
- Une matrice M est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$ s'appelle l'*indice de nilpotence* de M.
- Soit $\mathscr{B}$ une base de E, un endomorphisme de E est nilpotent d'indice p si sa matrice dans $\mathscr{B}$ est nilpotente d'indice p.
- On pose $J_1 = (0)$ et, pour un entier $\alpha \geqslant 2$:

$$J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_\alpha(\mathbb{C})$$

- Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathscr{M}_m(\mathbb{C})$, on note $\operatorname{diag}(A, B)$, la matrice diagonale par blocs :

$$\operatorname{diag}(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+m}(\mathbb{C})$$

- Plus généralement, si $A_1 \in \mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $A_2 \in \mathscr{M}_{n_2}(\mathbb{C}), \cdots, A_k \in \mathscr{M}_{n_k}(\mathbb{C})$, on note :

$$\operatorname{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_k) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n_1+n_2+\cdots+n_k}(\mathbb{C})$$

I. Premiers résultats

1. Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?

I.A - Réduction d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n = 2$.
Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geqslant 2$.

2. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.

3. Vérifier que la famille $\left(u^k(x)\right)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre. En déduire que $p = 2$.

4. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.

5. Construire une base de E dans laquelle la matrice de u est égaleà J_2.

6. En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices de trace et déterminant nuls.

I.B - Réduction d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n \geqslant 3$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice 2 et de rang r.

7. Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et que $2r \leqslant n$.

8. On suppose que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_r$ de E tels que la famille $\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r)\big)$ est une base de E.

9. Donner la matrice de u dans cette base.

10. On suppose $\mathrm{Im}(u) \neq \mathrm{Ker}(u)$.
Montrer qu'il existe des vecteurs :

× $e_1, e_2, \dots, e_r$ de E,

× et des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_{n-2r}$ appartenantà $\mathrm{Ker}(u)$,

tels que $\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r}\big)$ est une base de E.

11. Quelle est la matrice de u dans cette base ?

Exercice 23 `(CCINP 2018)`

Dans la suite, n désigne un entier naturel non nul et a et b sont des constantes réelles.

1. On note Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \Delta(P) = XP'$$

Calculer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\Delta(X^k)$.

2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $X^2 P'' = \Delta \circ (\Delta - \mathrm{id}_{\mathbb{R}[X]})$.

3. Montrer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

On notera Δ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Δ.

4. Déterminer la matrice de Δ_n dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. On définit l'application Φ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \Phi(P) \ = \ X^2 P'' + aXP'$$

Montrer : $\Phi = \Delta^2 + (a-1)\,\Delta$ et en déduire que Φ définit un endomorphisme Φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. Montrer que Φ induit un endomorphisme Φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$.

7. (Montrer que Φ_n est diagonalisable) `[à traiter l'an prochain]`.

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \varphi(P) = X^2 P'' + aXP' + bP$$

8. Montrer que φ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, endomorphisme que l'on notera φ_n.
Exprimer φ_n en fonction de Δ_n.

9. Exprimer la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

On considère l'équation :

$$s^2 + (a-1)s + b = 0$$

10. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet deux racines entières m_1, $m_2 \in [\![0, n]\!]$.

11. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet une unique racine entière $m \in [\![0, n]\!]$.

12. Déterminer le noyau de φ. En déduire qu'il est de dimension finie et déterminer sa dimension.