Logique

Négation

Exercice 1

Donner les négations des propositions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z},\ n \leqslant x < n+1$

2. Toute suite convergente est bornée.

3. Tous les garçons de la classe ont une mère qui a au moins un frère.

4. $\forall (a,b) \in A^2$, $ab = 0 \Rightarrow (a = 0$ ou $b = 0)$.

5. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

Opérateur d'implication

Exercice 2

1. A-t-on : $(1 = 2) \ \Rightarrow\ (1 = 1)$?

2. A-t-on : $(1 = 2) \ \Rightarrow\ (\ln(1) = 1)$?

3. A-t-on, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(x > 1) \ \Rightarrow\ (x \geqslant 2)$?

4. A-t-on, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(x^2 - 3x + 2 = 0) \ \Rightarrow\ (x \geqslant 0)$?

5. Que peut-on dire des réciproques des propositions précédentes ?

Exercice 3

On considère la proposition : « s'il pleut, mon jardin est mouillé ». Quelle est sa négation ?

a) « s'il ne pleut pas, mon jardin n'est pas mouillé »

b) « s'il ne pleut pas, mon jardin est mouillé »

c) « si mon jardin n'est pas mouillé, il ne pleut pas »

d) « il pleut et mon jardin n'est pas mouillé »

e) autre réponse

Exercice 4

Traduire les propositions suivantes (exprimées en français) à l'aide de symboles mathématiques.

1. Pour que p soit vraie, il faut que q soit vraie.

2. Pour que p soit vraie, il suffit que q soit vraie.

3. La proposition q est une condition suffisante de la proposition p.

4. Pour qu'un réel x soit positif, il suffit qu'il ne soit pas négatif.

Exercice 5

Soient a et b deux nombres réels. Démontrer l'implication :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & a & \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant & b & \leqslant & 1 \\ & & ab & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow a = b = 1$$

Exercice 6

On dispose de quatre cartes, chacune comportant un chiffre sur un côté et une lettre sur l'autre.

On place les quatre cartes ainsi sur la table : $\boxed{\text{D}}$ $\boxed{\text{R}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{7}$

La règle est : « Si une carte a un D sur l'un des côtés, alors il y a un 3 de l'autre côté. »
Quelles cartes devez-vous retourner afin de vérifier que la règle est bien respectée ?

Opérateur d'équivalence

Exercice 7

Soit $x \in \mathbb{R}$. A-t-on : $(x^2 = 9) \ \Leftrightarrow \ (x = 3)$?
(en français : pour que $x^2 = 9$, il faut et il suffit que $x = 3$)

Exercice 8

Compléter par $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$.

1. $\ln x = -3 \quad \dots \quad x = \mathrm{e}^{-3}$
2. $x \geqslant x^2 \quad \dots \quad x \geqslant 0$
3. $\sqrt{x}$ existe $\quad \dots \quad x \geqslant 0$
4. $|x| \leqslant 3 \quad \dots \quad 0 \leqslant x \leqslant 3$
5. $|x| \geqslant 5 \quad \dots \quad 5 \leqslant x$

Exercice 9

Soient p et q deux propositions. Exprimer la proposition $(p \Leftrightarrow q)$ en n'utilisant que les connecteurs logiques `ET`, `OU` et `NON()`.

Exercice 10

Soient p, q et r trois propositions. Démontrer :

1) $\texttt{NON}(p \ \texttt{ET} \ q) \iff \texttt{NON}(p) \ \texttt{OU} \ \texttt{NON}(q)$

2) $\texttt{NON}(p \ \texttt{OU} \ q) \iff \texttt{NON}(p) \ \texttt{ET} \ \texttt{NON}(q)$

3) $p \ \texttt{ET} \ (p \ \texttt{OU} \ q) \iff p$

4) $p \ \texttt{OU} \ (p \ \texttt{ET} \ q) \iff p$

5) $p \ \texttt{ET} \ (q \ \texttt{OU} \ r) \iff (p \ \texttt{ET} \ q) \ \texttt{OU} \ (p \ \texttt{ET} \ r)$

6) $p \ \texttt{OU} \ (q \ \texttt{ET} \ r) \iff (p \ \texttt{OU} \ q) \ \texttt{ET} \ (p \ \texttt{OU} \ r)$

7) $\big((p \Rightarrow q) \ \texttt{ET} \ (q \Rightarrow r)\big) \implies (p \Rightarrow r)$

8) $(p \Rightarrow q) \implies \big((r \Rightarrow p) \Rightarrow (r \Rightarrow q)\big)$

Utilisation de quantificateurs

Exercice 11

Justifier les assertions suivantes quand elles sont justes et donner un contre-exemple quand elles sont fausses.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant x$

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$

Exercice 12

Parmi les propositions ci-dessous, exhiber un élément qui permet de satisfaire celles qui sont justes.

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 3$

2. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ x \leqslant n$

3. $\exists p \in \mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ p \leqslant n$

4. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^y = x\, z^2$

Exercice 13

1. Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes, définies sur l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers naturels non nuls (certaines sont vraies, d'autres fausses).
- tout entier est le carré d'un entier.
- tout entier a pour carré la somme des carrés de deux entiers.
- certains entiers ont pour carré la somme des carrés de deux entiers.
- aucun entier n'est plus grand que tous les autres.

2. Exprimer la négation de ces propositions.

Exercice 14

Évaluer les deux propositions suivantes :
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y = 0$
- $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x + y = 0$

Exercice 15
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Discuter l'évaluation des 2 propositions suivantes.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R}_+,\ |f(x)| \leqslant M$
- $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant M$

2. Donner la négation de la seconde.

Exercice 16
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. Énoncer (à l'aide de quantificateurs et de connecteurs logiques) les propriétés suivantes, ainsi que leur négation.

a) la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$;
b) la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$;
c) la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
d) la fonction f est paire ;
e) la fonction f est monotone sur $\mathbb{R}$;
f) la fonction f admet un maximum ;
g) l'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution dans $\mathbb{R}$;
h) l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution ;
i) tout réel a un antécédent par f ;
j) la fonction f ne prend pas deux fois la même valeur.

Exercice 17
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

a) Que signifie la proposition : « f est périodique » ?
b) Soit $T \in \mathbb{R}$. Que signifie la proposition : « f est périodique de période T » ?
c) On suppose que pour tout T réel, f est périodique de période T. Montrer que f est constante.

Exercice 18

a) Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant la propriété $\mathcal{A}(x)$: $\forall \varepsilon > 0,\ x \leqslant \varepsilon$.
b) Même question pour la propriété $\mathcal{A}_1(x)$: $\forall \varepsilon > 0,\ x < \varepsilon$.
c) Établir : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \big((\forall \varepsilon > 0,\ x \leqslant y + \varepsilon) \Rightarrow (x \leqslant y)\big)$

Méthodes de démonstration

Exercice 19
Démontrer que la proposition suivante est fausse.

$$\forall x \in \,]-\infty, 1[,\ 2^{(3^x)} \big(\ln(1-x) + 1\big)(3x^3 + x\,\mathrm{e}^x - 4) \geqslant 0$$

Exercice 20
Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 21
Soient a, b, c et d des nombres rationnels tels que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$.
En utilisant un raisonnement par l'absurde ainsi que le résultat de l'exercice précédent, démontrer : $a = c$ et $b = d$.

Exercice 22
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par l'absurde que si n^2 est pair, alors n est pair.
Faire de nouveau la démonstration en raisonnant par contraposée.

Exercice 23
Soit $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $n^2 - 2$ n'est jamais divisible par 3.

Équations et inéquations

Calcul élémentaire

Exercice 24
Simplifier les expressions suivantes.

a) $\dfrac{\frac{3}{2}}{3}$

b) $\dfrac{2}{3} - \dfrac{7}{12} + \dfrac{5}{9} - \dfrac{1}{6}$

c) $\dfrac{2^5 \times 25 \times 3^{-4} \times 36}{3^8 \times 45 \times 100}$

d) $(\sqrt{2} + 5\sqrt{3})\,(2 - \sqrt{3})$

e) $\dfrac{3\sqrt{72}}{2\sqrt{162}}$

f) $\dfrac{1}{5 - 3\sqrt{2}} + \dfrac{3 - 3\sqrt{2}}{7}$

Exercice 25
Factoriser ou développer les expressions suivantes.

a) $(3x+2)^3$

b) $x^4 - 1$

c) $(2x-1)^4$

d) $8x^2 - 32$

e) $(2x-6)\,(x+2) - (x+1)\,(x-3) + 2x\,(3-x)$

f) $(2x+1)^3 + (2x+1)^2 + 2x + 1$

Exercice 26
Simplifier les expressions suivantes.

a) $\dfrac{x^{n+1}}{x}$

b) $\dfrac{y}{y^n}$

c) $\dfrac{1}{z^{-n}}$

d) $\dfrac{1}{x^{1-n}}$

e) $\dfrac{(-3)^{2n-1}}{7^{4n+1}}$

f) $\dfrac{3^{2n}\,5^{n-1}}{(-7)^{n+1}}$

g) $\dfrac{x^{2n-1}}{(x^{n+1})^3}$

h) $|\ln(\mathrm{e}^2 + 1)|$

i) $8^{n+1} - 4^n \times 2^{n+2}$

j) $(x^2 - x - 2)^2 - (2x^2 + x - 1)^2$

k) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1}$

l) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

m) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2$

n) $\dfrac{(-1)^n - (-1)^{n-1}}{(-1)^{2n} - (-1)^{2n+1}}$

o) $|3\ln 6 - 2\ln 4 - \ln 9|$

p) $\dfrac{(-4)^3 \times 15^2}{6^3 \times 10^3 \times (-2)^{(-2)}}$

q) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dots$

r) $\dfrac{a}{\frac{\frac{b}{c}}{d}} = \dots$

Équations

Exercice 27
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $x - 7 = \sqrt{x-5}$

b) $\sqrt{2-x} = x + 4$

c) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3} - \sqrt{3x-1} = 0$

d) $\sqrt{|x^2 - x + 6|} = x + 1$

Exercice 28
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $\dfrac{5}{3-x} = 3 - \dfrac{x+4}{3}$

b) $x + 1 = \sqrt{\dfrac{x}{6} + 6}$

c) $\dfrac{5}{3x-2} = \dfrac{1}{x-4}$

d) $\dfrac{2}{x-3} = 3$

e) $x + \dfrac{2}{6 - \dfrac{3}{x-1}} = 1$

Exercice 29
Résoudre les équations suivantes :

1. $\sqrt{x}+1=2x$

2. $\dfrac{x^3+2x^2-x+1}{x-1}=2-x+x^2$

3. $|x+1|+|2x+1|=0$

4. $(m-2)\,x^2+2(m+1)\,x+m-14=0$, où m est un paramètre réel.

Exercice 30
Résoudre les équations suivantes.

1. $\ln(x-2)+\ln(x+3)=2$

2. $\big(\ln(x)\big)^3-7\big(\ln(x)\big)^2+36=0$

3. $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{15}{4}$

4. $\pi^{3x}-3\times\pi^x+2=0$

5. $5^{3x+4}-7^{2x-3}=0$

6. $\mathrm{e}^{2x}-4m\,\mathrm{e}^x+2(m+1)=0$, où m est un paramètre réel.

Inéquations

Exercice 31
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $x+2\geqslant\sqrt{x+5}$

b) $-x+1\leqslant\sqrt{3x^2-2x-7}$

c) $x-2\leqslant\sqrt{x-1}$

d) $\sqrt{x+3}<-x+4$

e) $\dfrac{2x-3}{x^2-4}<1$

Exercice 32
Résoudre les inéquations suivantes :

1 $|4-2x|\leqslant 8$

2 $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{x(x-1)}\leqslant 1$

3 $\sqrt{x+5}\geqslant\sqrt{x^2-4}$