Nature d'une série

Exercice 1

Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

a. $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{n^2}$

b. $\sum \dfrac{n+1}{(n+3)^2}$

c. $\sum n^4 \, \mathrm{e}^{-n}$

d. $\sum n^n \, \mathrm{e}^{-n}$

e. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

f. $\sum \dfrac{1}{n\,2^n}$

g. $\sum \mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}$

h. $\sum \dfrac{1}{3^n - 2^n}$

i. $\sum \dfrac{n+2}{n^3+1}$

j. $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$

k. $\sum \dfrac{n}{\ln(n)}$

l. $\sum \dfrac{\ln(n)}{n}$

m. $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$

n. $\sum \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^3}\right)$

o. $\sum \dfrac{3^{\frac{1}{n}}-1}{n}$

p. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n!}}$

q. $\sum \dfrac{1}{n^2-n}$

r. $\sum \dfrac{1}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}$

s. $\sum \dfrac{1}{n^4 - 3^n}$

t. $\sum \ln\left(\dfrac{n^2+n^4}{2n^4}\right)$

u. $\sum \sqrt{\dfrac{n+2}{n^3-5n+1}}$

v. $\sum \dfrac{\ln(n)}{2^n}$

w. $\sum \dfrac{1}{(3+(-1)^n)^n}$

x. $\sum \left(\dfrac{5n+1}{6n+2}\right)^n$

Exercice 2

Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

a. $\sum \dfrac{n!}{n^n}$

b. $\sum \dfrac{a^n+1}{b^n}$, où $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

c. $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^a + (-1)^n}}$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$

Exercice 3

Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

a. $\sum \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

b. $\sum \dfrac{(n!)^3}{(3n)!}$

c. $\sum \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$

d. $\sum \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$

e. $\sum \dfrac{\sin(n^3)}{n^2}$

f. $\sum \sqrt{n}\, \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Nature d'une série à l'aide d'un développement asymptotique

Exercice 4

Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

a. $\sum \left(\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}\right)$

b. $\sum \left(1-\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right)$

c. $\sum \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Calcul de sommes à vue (sommes usuelles)

Exercice 5
Étudier la nature et calculer la somme (si elle existe) des séries suivantes (on pourra discuter selon la valeur de x, dans les questions où un x intervient).

a. $\sum \frac{7}{2^{2n-5}}$

b. $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

c. $\sum \frac{n}{2^n}$

d. $\sum n^2 x^n$

e. $\sum \frac{n}{3^{2n+1}}$

f. $\sum \frac{(-1)^n n^2}{3^n}$

g. $\sum \frac{4n^2+5n}{5^n}$

h. $\sum \frac{n-1}{3^n}$

i. $\sum \frac{2n^2}{n^3-1}$

j. $\sum \frac{3(-2)^n}{n!}$

k. $\sum \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

l. $\sum \frac{n+7}{2^n n!}$

m. $\sum \frac{n(n-1)x^n}{n!}$

n. $\sum \frac{n^2 8^n}{n!}$

o. $\sum \frac{(-1)^n}{4^n}$

p. $\sum \frac{2^{n+2}}{(n+1)!}$

q. $\sum \frac{n(n+3)}{3^{n+2}}$

r. $\sum \frac{n^2-n}{(n+3)!}$

Exercice 6
Justifier la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

a. $\sum \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$ ***b.*** $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ ***c.*** $\sum \frac{1}{(3n)!}$

Pour la question ***c.***, on pourra déterminer la valeur de $1+j^n+j^{2n}$ pour n congru à 0, 1 ou 2 modulo 3.

Suites adjacentes

Exercice 7
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n) \quad \text{et} \quad v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)$$

1) a. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites adjacentes.

b. En déduire qu'il existe $\gamma\in\mathbb{R}$ et une suite (α_n) de limite nulle tels que :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln(n)+\gamma+\alpha_n$$

(le réel γ est appelé constante d'Euler)

2) a. Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n\leqslant\gamma\leqslant u_n$.

b. Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ |\gamma-u_n|\leqslant|v_n-u_n|$.

c. Écrire un programme **Python** qui affiche une valeur approchée de γ à 10^{-4} près.

Séries de Bertrand

Exercice 8
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note : $u_n=\frac{1}{n^\alpha\left(\ln(n)\right)^\beta}$, où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

1. Cas $\alpha\neq1$. Comparer asymptotiquement u_n à $\frac{1}{n^{(1+\alpha)/2}}$.
En déduire la nature de la série $\sum u_n$.
(indication : on distinguera les cas $\alpha>1$ et $\alpha<1$)

2. Traiter le cas $\alpha=1$ à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

Reste d'une série convergente

Exercice 9 *(d'après* `INP`*)*
Pour $\alpha>1$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$ et $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$.

1. Encadrer R_n et en déduire un équivalent de R_n.

2. Étudier la convergence de la série $\sum \frac{R_n}{S_n}$ selon α.

3. Soit $x_n = R_{n^2}/R_n$. Discuter la nature des séries $\sum x_n$ et $\sum (-1)^n x_n$.

Formule de Stirling

Exercice 10

Le but est de prouver l'équivalent suivant (à connaître) :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n^n\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n\, n!}$ et $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

   a. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$, puis de la suite $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   b. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}$.

2. **Intégrales de Wallis**

   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^n\, dt$.

   a. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante, et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, w_n$$

   b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$ et $(n+1)\, w_{n+1}\, w_n = \dfrac{\pi}{2}$.

   c. Déduire des questions précédentes deux équivalents de w_{2n}, et conclure.

Séries à termes positifs et critères de convergence des séries

Exercice 11 *(d'après* `INP`*)*

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle positive. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$b_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) \quad \text{et} \quad u_n = \frac{a_n}{b_n}$$

1. ***a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{b_n}$.

   b) En déduire que la série $\sum u_n$ converge.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Étudier la convergence de la suite (b_n).

Exercice 12

1. ***a)*** Soit $x \in [0,1]$. Montrer que : $0 \leqslant x^2 \leqslant x$.

   b) On considère (x_n) une suite de réels positifs.

   Montrer que : $\sum x_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum x_n^2$ converge.

2. Exhiber un contre-exemple dans le cas où la série étudiée n'est pas à termes positifs.

Exercice 13

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

On suppose que les séries $\sum {u_n}^2$ et $\sum {v_n}^2$ convergent.

1. Démontrer : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R},\ 2\,ab \leqslant a^2 + b^2$.

2. À l'aide de l'inégalité précédente, démontrer que la série $\sum u_n\, v_n$ est (absolument) convergente.

Exercice 14

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + {u_n}^2 \end{cases}$

1) ***a.*** Montrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

2) On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

a. Montrer que pour tout $t > 0$: $\ln(1+t) \leqslant t$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}\, u_n}$.

c. Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est convergente.

d. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite.

3) ***a.*** Montrer, à l'aide de la question 2b :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_{n+p+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n\, u_n}$$

b. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant \ell - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^n\, u_n}$.

c. En déduire : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{2^n \ell}$.

Transformation et théorème d'Abel

Exercice 15

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites complexes. Soit $(M,N) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant : $M \leqslant N$. Démontrer :

$$\sum_{k=M}^{N} u_n\,(v_{n+1} - v_n) \;=\; u_N\, v_{N+1} - u_M\, v_M - \sum_{k=M+1}^{N} v_n\,(u_n - u_{n-1})$$

2. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. En considérant $u_n = \dfrac{1}{n}$ et v_n à déterminer, démontrer que la série de terme général $\dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n}$ converge.

3. Plus généralement, démontrer que si (u_n) est une suite réelle décroissante convergeant vers 0, et (v_n) une suite complexe dont les sommes partielles sont bornées, alors la série $\sum\ u_n\, v_n$ converge.

Règle de d'Alembert

Exercice 16

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs. On suppose : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \big(\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}\big)$.

1. Supposons : $\ell > 1$ ou $\ell = +\infty$. Démontrer que la série $\sum\ u_n$ diverge.

2. Supposons : $\ell < 1$. Démontrer que la série $\sum\ u_n$ converge.

3. Que peut-on dire dans le cas $n = 1$? Donner des exemples.

4. **Application**. Déterminer la nature des séries suivantes.

a) $\sum\ \dfrac{1}{5^n} \dbinom{2n}{n}$

b) $\sum\ \dfrac{n!\,\mathrm{e}^n}{(2n)^{n+2}}$

5. **Critère de Cauchy**. On suppose cette fois : $\sqrt[n]{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. En procédant de manière analogue, montrer que :

a) si $\ell > 1$, alors $\sum\ u_n$ diverge,

b) si $\ell < 1$, alors $\sum\ u_n$ converge.

Critère spécial des séries alternées

Exercice 17

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, décroissante et telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k\, u_k$.

1. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

2. En déduire que la série $\sum (-1)^n\, u_n$ converge.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'inégalité suivante sur le reste :

$$\left| \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k\, u_k \right| \leqslant u_n$$

4. **Application**.

Déterminer les valeurs des réels α et β telles que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha \big(\ln(n)\big)^\beta}$ converge.

Règle de Raabe-Duhamel

Exercice 18 *(d'après TPE - écrit E3A 2009)*

Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs.

On suppose qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ telle que : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\beta}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

1. Soient (x_n) et (y_n) deux éléments de $(\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telles que, à partir d'un certain rang :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \frac{y_{n+1}}{y_n}$$

Montrer : $x_n = \underset{n\to+\infty}{O}(y_n)$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \neq \beta$.
Trouver un équivalent de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{w_{n+1}}{w_n}$, où $w_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

3. Montrer que si $\beta > 1$ (resp. $\beta < 1$), alors la série $\sum u_n$ converge (resp. diverge).

4. Montrer que pour $\beta = 1$, on ne peut pas conclure a priori sur la nature de la série $\sum u_n$.
(indication : on pourra considérer les cas des séries $\sum \dfrac{1}{n}$ et $\sum \dfrac{1}{n\ln^2(n)}$)

Sommes télescopiques

Exercice 19

On considère la suite (a_n) est définie par : $\left\{ \begin{array}{l} a_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \mathrm{e}^{-a_n}\, a_n \end{array} \right.$

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$.

b. Quelle est la nature de la suite (a_n) ?

c. Montrer que la suite (a_n) est convergente et déterminer sa limite.

d. On pose $b_n = \ln(a_n)$. Calculer $b_{n+1} - b_n$ en fonction de a_n.

e. En déduire la nature de $\sum a_n$.

Exercice 20
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

On appelle (u_n) la suite définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{f(u_n)} \end{array}\right.$$

1) a. Étudier la fonction f et dresser son tableau de variations.
b. Montrer que (u_n) est strictement positive et strictement décroissante.
c. En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.

2) a. Montrer que (v_n) est strictement négatif.
b. Montrer que (v_n) est convergente de limite nulle.
c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k)$.
d. En déduire la nature de la série $\sum v_n$.

Dans la suite, on admettra :

$$\forall x \in [0, 1],\ \frac{x^2}{4} \leqslant 1 - \frac{2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \leqslant x^2$$

3) a. En déduire la nature de la série $\sum {u_n}^2$.
b. En utilisant le résultat de l'exercice 12, déterminer la nature de $\sum u_n$.

Exercice 21
On considère la suite (u_n) définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 \in]0, 1] \\ \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{array}\right.$

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0, 1]$.
2. Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
3. Étudier la nature de la série $\sum u_n^2$ et donner sa somme, si elle existe.
4. Prouver que la série $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.
5. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Comparaison séries intégrales

Exercice 22
On définit la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f & : & [2, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{array}$$

1. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 2$ on a : $\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$.

2. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on définit l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_2^n f(x)\ dx$.

a. En utilisant l'inégalité de la question ***1.***, démontrer :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = +\infty$$

b. On définit la fonction F suivante :

$$\begin{array}{rccl} F & : & [2, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \end{array}$$

Calculer la dérivée de F.
En déduire une expression de I_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de $I_n - \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

3. On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$$

a. Pour tout k entier supérieur ou égal à trois, montrer qu'on a :

$$\int_k^{k+1} f(x)\ dx \leqslant \frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\ dx$$

b. En déduire : $\forall n \geqslant 3,\ I_{n+1} \leqslant S_n \leqslant I_n + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

c. Démontrer : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

4. On considère $\alpha \in \mathbb{R}$ et on définit, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k^2-1)^\alpha}$$

a. Dans cette question, $\alpha = 1$. Trouver deux réels a et b tels que :

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}$$

En déduire une expression de T_n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

b. Pour quelles valeurs de α la suite (T_n) est-elle convergente ?

Exercice 23

On note f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in\ ]1,+\infty[,\ f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$$

1) Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative.

2) Montrer : $\forall k \geqslant 3$, on a : $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \leqslant f(k-1)$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note : $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} f(k)$.

3) ***a.*** Montrer que : $\forall n \geqslant 3,\ S_n - \dfrac{1}{2\ln(2)} \leqslant \displaystyle\int_2^n f(t)\ dt \leqslant S_n - \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$:

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leqslant S_n \leqslant \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}$$

c. Établir que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note :

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \quad \text{et} \quad v_n = S_n - \ln(\ln(n))$$

4) À l'aide de la question 2, montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

5) ***a.*** Montrer, pour tout entier $n \geqslant 2$: $0 \leqslant v_n - \ell \leqslant \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

(indication : on pourra commencer par démontrer que $v_n - \ell \leqslant v_n - u_n$)

b. En déduire une fonction en **Python** qui calcule une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.