Modélisation probabiliste

Exercice 1

Proposer un espace probabilisable permettant la modélisation des situations suivantes.

1. On lance une fois deux dés à 6 faces et on s'intéresse aux deux résultats obtenus.

2. Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. On lance une pièce n fois d'affilée et on s'intéresse à la suite des côtés apparents (pile ou face).

3. Deux équipes de football se font face et s'apprêtent à tirer des pénalties tour à tour. Au bout de 5 tirs par équipe, on compare le nombre de tirs réussis (égalité possible).

4. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, qu'on tire une à une sans remise jusqu'à vider l'urne. On s'intéresse à la séquence des numéros tirés, en tenant compte de l'ordre d'apparition.

5. Une classe est constituée de 48 élèves. On en tire 3 au hasard et on s'intéresse à leur date d'anniversaire.

Cas de l'équiprobabilité

Exercice 2

On joue à pile ou face quatre fois de suite.

- On note A l'événement : « on obtient deux fois pile et deux fois face »
- On note B l'événement : « les deux premiers lancers ont donné des résultats différents ».

a. Décrire l'univers Ω et l'ensemble des événements $\mathcal{P}(\Omega)$.
On calculera notamment le cardinal de $\mathcal{P}(\Omega)$.

b. Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A \cup B)$.

Exercice 3

Un tiroir contient 10 paires de chaussettes toutes différentes.
On pioche au hasard 4 chaussettes.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une paire complète ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir deux paires ?

Exercice 4

On lance 7 fois de suite un même dé à 20 faces.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros distincts à chaque lancer ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir toujours le même numéro ?

Exercice 5

Un tiroir contient 12 paires de chaussettes et 2 paires de gants. Les doigts engourdis par le froid et la vision obscurcie par le sommeil, on pioche n objets dans le tiroir.

a. Que doit valoir n au minimum pour avoir une probabilité non nulle d'obtenir une paire de chaussettes complète et une paire de gants complète ?

b. Même question pour une probabilité égale à 1.

c. Et que doit valoir n au minimum pour que cette probabilité soit supérieure ou égale à $1/2$?

Exercice 6

On place au hasard cinq boules distinguables dans quatre boîtes également distinguables.

a. Combien y a-t-il de rangements possibles ?

b. Quelle est la probabilité que toutes les boules soient dans la même boîte ?

c. Quelle est la probabilité que deux boîtes exactement soient vides ?

d. Quelle est la probabilité qu'une boîte exactement soit vide ?

e. En déduire la probabilité qu'aucune boîte ne soit vide.

f. Retrouver ce résultat avec la formule du crible.

Exercice 7

Une urne contient 8 boules numérotées de 1 à 8.
On tire trois fois de suite une boule avec remise.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres dans un ordre strictement croissant ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres dans un ordre croissant ?

Probabilité conditionnelle

Exercice 8

Dans une urne se trouvent quatre boules noires et deux boules blanches. Cinq personnes tirent successivement et sans remise une boule dans l'urne. Le premier qui tire une boule blanche a gagné.
Quelle est la probabilité de victoire de chacune des cinq personnes ?

Système complet d'événements

Exercice 9

Les questions ci-dessous sont indépendantes.

1. Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. On lance une pièce n fois d'affilée, lancers numérotés, et on s'intéresse à la séquence des côtés visibles (pile ou face).

  a) Proposer un espace probabilisable permettant de modéliser l'expérience.

  b) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note P_k l'événement : « on obtient pile au $k^{\text{ème}}$ lancer ». Les événements de la famille $(P_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ sont-ils incompatibles ?

  c) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k l'événement : « on obtient le premier pile au $k^{\text{ème}}$ lancer ». La famille $(A_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ forme-t-elle un système complet d'événements ?

2. On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes classique et on s'intéresse à la main obtenue.

  a) Proposer un espace probabilisable permettant de modéliser cette expérience.

  b) Pour tout $k \in [\![0, 4]\!]$, on note R_k l'événement : « la main contient au moins k rois ». La famille $(R_0, \dots, R_4)$ forme-t-elle un système complet d'événements ?

Exercice 10

On considère un jeu de fléchettes sur une cible comportant 3 zones : Z_1, Z_2 et Z_3. On lance une fléchette sur la cible. Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, on considère les événements $A_k =$ « la fléchette atteint la zone Z_k ».
Soit $\mathbb{P}$ une probabilité définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle qu'il existe un réel c vérifiant, pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, $\mathbb{P}(A_k) = c\,k$.

a. Décrire l'univers associé à cette expérience.

b. Montrer que (A_1, A_2, A_3) forme un système complet d'événements.

c. Déterminer l'unique valeur possible pour c.

Inégalités

Exercice 11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient A_1, …, A_n des événements définis sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Les deux questions ci-dessous sont indépendantes.

1. Démontrer :

$$\mathbb{P}\big(A_1 \cap \cdots \cap A_n\big) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - (n-1)$$

2. On suppose que les événements de la famille $(A_1, \dots, A_n)$ sont mutuellement indépendants. Démontrer que la probabilité qu'aucun des A_i ne soit réalisé est majorée par $\exp\left(-\sum\limits_{k=1}^{p} \mathbb{P}(A_k)\right)$.

Formule des probabilités composées

Exercice 12

Une expérience est conduite pour étudier la mémoire des rats. Un rat est mis devant trois couloirs. Au bout de l'un d'eux se trouve la nourriture qu'il aime, au bout des deux autres, il reçoit une décharge électrique. Cette expérience est répétée jusqu'à ce que le rat trouve le bon couloir.

Quelle est la probabilité que la première tentative réussie soit la $k^{\text{ème}}$?
On répondra à cette question sous chacune des trois hypothèses suivantes.

- (H_1) le rat n'a aucun souvenir des expériences antérieures,
- (H_2) le rat se souvient de l'expérience immédiatement précédente,
- (H_3) le rat se souvient des deux expériences précédentes.

Exercice 13

Une urne contient 10 boules blanches, 4 boules rouges et 6 boules noires.

a. On tire 3 boules avec remise.
Quelle est la probabilité que le tirage soit tricolore ? bicolore ? unicolore ?

b. On tire 3 boules sans remise.
Quelle est la probabilité que le tirage soit tricolore ? bicolore ? unicolore ?

Formule des probabilités totales

Exercice 14

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne numéro k se trouvent k boules blanches et $n-k$ boules rouges. On choisit au hasard (équiprobablement) une urne, puis on tire deux boules dans cette urne.

a. Quelle est la probabilité d'avoir deux boules blanches ?

b. Même question si on tire les deux boules successivement et avec remise.

c. Quelle est la limite de ces probabilités quand n tend vers $+\infty$?

Formule des probabilités totales / formule de Bayes

Exercice 15

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R_1, R_2 et R_3 : les bons risques, les risques moyens, et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe R_1, 50% pour la classe R_2, et 30% pour la classe R_3. Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.

a. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?

b. Si M. Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?

Exercice 16

En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires : avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés. Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

a. Quel est le taux global de personnes soulagées ?

b. Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

Exercice 17

Une usine fabrique 3% de pièces défectueuses. Toutes les pièces fabriquées sont contrôlées. 99% des pièces correctes sont acceptées et 98% des pièces défectueuses sont refusées. Calculer la probabilité pour que :

a. La pièce testée soit refusée à tort.

b. La pièce testée soit acceptée.

c. Le contrôle commette une erreur.

d. Une pièce qui a été acceptée soit en fait défectueuse.

Exercice 18
Les ampoules de la marque X sont fabriquées dans deux usines, A et B. 20% des ampoules de l'usine A et 5% de l'usine B sont défectueuses. Chaque semaine l'usine A produit $2n$ ampoules et l'usine B produit n ampoules (où n est un entier). On tire une une ampoule au hasard dans la production d'une semaine.

a. Quelle est la probabilité que l'ampoule tirée ne soit pas défectueuse ?

b. Si l'ampoule tirée est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'usine A ?

Exercice 19
On considère une population touchée par une maladie rare. Cette maladie touche une personne sur 10000. Un test de dépistage est proposé et donne les résultats suivants :

- si une personne est malade, le test est positif à 99%,
- si une personne est saine, le test peut aussi se révéler positif à hauteur de $0,1\%$ (on parle de *faux positif*).

A-t-on intérêt à se fier aux résultats de ce test ?
Plus précisément, on calculera la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif.

Indépendance

Pour les exercices 20 et 21, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

Exercice 20
Existe-t-il deux événements A et B à la fois incompatibles et indépendants ?

Exercice 21
Soient A, B et C des événements mutuellement indépendants.
Montrer que A et $B \cup C$ sont indépendants.

Exercice 22
Une urne contient deux boules vertes et trois boules jaunes. On effectue quatre tirages avec remise dans cette urne. On considère les événements suivants :

$A =$ « les deux premiers tirages donnent des boules vertes »
$B =$ « les deux derniers tirages donnent des boules vertes »
$C =$ « les deuxième et troisième tirages donnent des boules jaunes »
$D =$ « les quatre tirages donnent des boules de la même couleur »

a. Parmi ces événements, dire lesquels sont indépendants.

b. Ces quatre événements sont-ils mutuellement indépendants ?

Exercice 23
On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer deux fois un dé 6.

- On note A : « le premier chiffre est pair ».
- On note B : « le second chiffre est impair ».
- On note C : « la somme des chiffres est paire ».

a. Démontrer que A, B et C sont deux à deux indépendants.

b. Démontrer que A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 24
Dans une population on sait que la probabilité de naissance d'un garçon est de $0,52$. Par ailleurs, on sait que 2% des filles et 1% des garçons présentent une luxation congénitale de la hanche.

a. On note F l'événement « naissance d'une fille » et L l'événement « avoir une luxation de la hanche ». Les événements F et L sont-ils indépendants ?

b. Quelle est la probabilité qu'un nouveau-né présentant une luxation soit une fille ?

Exercice 25
On dispose de 3 composants électriques C_1, C_2 et C_3 dont la probabilité de fonctionnement est p_i. Le fonctionnement d'un composant est supposé totalement indépendant des autres.
Donner la probabilité de fonctionnement du circuit dans les cas suivants :

a. si les composants sont disposés en série,

b. si les composants sont disposés en parallèle,

c. si le circuit est mixte : C_1 est disposé en série avec le sous-circuit constitué de C_2 et C_3 en parallèle.

Évolution d'une grandeur aléatoire dans le temps (discret)

Exercice 26
Un fumeur veut arrêter de fumer. S'il réussit à ne pas fumer un jour, le lendemain il reste motivé et ne fume qu'avec une probabilité de $1/4$. Par contre s'il fume un jour, le lendemain il fume avec une probabilité notée α. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la probabilité qu'il fume le $n^{\text{ème}}$ jour.

a. Exprimer p_n en fonction de p_{n-1} et α.

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \left(\alpha - \frac{1}{4}\right)^n p_0 + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha - \frac{1}{4}\right)^k$

c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

d. Cette limite peut-elle être nulle ?
Dans la négative, donnez-en une borne inférieure.
Cette stratégie vous parait-elle judicieuse pour arrêter de fumer ?

Exercice 27
Deux joueurs A et B jouent aux échecs sans discontinuer. Le joueur B gagne la première partie. La probabilité que A remporte sa partie sachant qu'il vient de remporter la précédente est de $0,6$. La probabilité que B remporte sa partie sachant qu'il vient de remporter la précédente est de $0,5$. On note p_n la probabilité que B remporte la $n^{\text{ème}}$ partie.

Montrer que (p_n) est arithmético-géométrique et donner sa formule explicite.

Exercice 28
Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1-p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

a. Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.

b. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.

c. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 29
Soit $n \in [\![3, +\infty[\![$. On lance une pièce de monnaie équilibrée n fois, les lancers étant supposés mutuellement indépendants. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On note P pour « pile » et F pour « face ».

1. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k l'événement « on obtient 2 piles consécutifs au moins une fois avant le $k^{\text{ème}}$ lancer inclus ». Justifier que tout tirage réalisant $\overline{A_k}$ se termine nécessairement soit par F, soit par FP.

2. On note, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $p_k = \mathbb{P}(\overline{A_k})$. Déduire de la remarque précédente une relation de récurrence liant p_k, p_{k+1} et p_{k+2} pour tout $k \in [\![1, n-2]\!]$.

3. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, calculer p_k.

4. Déterminer la limite de (p_n) si elle existe.

5. Proposer une fonction **Python**, prenant en paramètre le réel p et permettant d'obtenir le nombre de lancers nécessaires pour avoir une probabilité supérieure ou égale à 99% d'obtenir au moins une fois deux piles consécutifs.

Exercice 30
Cet exercice constitue une généralisation de l'exercice 29.
On place un singe devant un clavier d'ordinateur. Ce clavier comporte 250 touches, lui permettant d'accéder à toutes les majuscules, minuscules, tous les signes de ponctuation et la barre d'espace. Son défi : recopier *Les Liaisons dangereuses*, de Pierre Choderlos de Laclos, soit 470 pages contenant 46 lignes de 52 caractères chacune, soit un total d'environ 1 124 240 caractères. On note cet entier α.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Supposons : $N \geqslant \alpha$. Le singe effectue une suite de N frappes aléatoires uniformes, mutuellement indépendantes, sur son clavier étendu. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

Pour tout $k \in [\![1, \lfloor N \rfloor \alpha]\!]$, on note A_k l'événement « le livre est recopié fidèlement entre les frappes $(k-1)\alpha + 1$ et $k\alpha$ (incluses) ».

On note enfin B_N l'événement « le livre a été fidèlement recopié au moins une fois au cours des N premières frappes ».

1. Justifier que les événements de la famille $(A_1, \dots, A_{\lfloor \frac{N}{\alpha} \rfloor})$ sont mutuellement indépendants et déterminer $\mathbb{P}\big(A_1 \cup \dots \cup A_{\lfloor \frac{N}{\alpha} \rfloor}\big)$.
2. Comparer $\mathbb{P}(B_N)$ et $\mathbb{P}\big(A_1 \cup \dots \cup A_{\lfloor \frac{N}{\alpha} \rfloor}\big)$.
3. Déterminer $\lim\limits_{N \to +\infty} \mathbb{P}(B_N)$.