Noyau et image d'une application linéaire

Exercice 1. *Cours*
Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer les trois assertions suivantes :

1. $f(0_E) = 0_F$

2. $\forall x \in E$, $f(-x) = -f(x)$

3. Pour tous réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et pour tous vecteurs $x_1 \dots x_n$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \qquad \text{(par récurrence)}$$

Exercice 2
Soit $f : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telle que $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 + 2x_2 + 5x_3$.
Montrer que f est linéaire, puis déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3
Soit $f : \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telle que $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.
Montrer que f est linéaire, puis déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$, avec une base pour chacun.

Exercice 4
Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ telle que $\varphi(P) = P'$.
Montrer que φ est linéaire, puis déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$, avec une base pour chacun.

Exercice 5
Soit $f : \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Ker}(f) = \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
Que dire de l'application f ?

Exercice 6
Soit $f : \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -x-y \end{pmatrix}$.
Montrer que f est linéaire, puis déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$, ainsi qu'une base pour chacun. Que conclure ?

Exercice 7
Soit $f : \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ en posant : $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ x^2-y^2 \end{pmatrix}$.
Démontrer que f n'est pas linéaire.

Exercice 8
Soit $g : \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Que valent m et n ?

2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(g)$ et de $\mathrm{Im}(g)$.

3. Étudier l'injectivité et la surjectivité de g.

Exercice 9
On définit une fonction $f : \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ en posant :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que f est linéaire.

2. Étudier l'injectivité de f, puis la surjectivité de f.

3. Déterminer si elle existe la bijection réciproque de f.

Exercice 10
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice et $f : \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $f(X) = AX$. On suppose A inversible.
Démontrer que f est bijective et que f^{-1} est l'application linéaire $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par $f^{-1}(Y) = A^{-1}Y$.

Exercice 11. *Endomorphisme et commutant*

1. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer que le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f est un sev de E.

2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice fixée.
On considère l'application $c_A : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA$.
   - *a)* Montrer qu c_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   - *b)* On note $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\}$ le commutant de la matrice A. Déduire des questions précédentes que $\mathcal{C}_A$ est un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   - *c)* Dans cette question, $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(c_A)$ et sa dimension.

Exercice 12. *Composition*
Soient E un espace vectoriel et f un automorphisme de E. On considère :

$$\Phi : \begin{cases} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{L}(E) \\ g & \mapsto & f \circ g \circ f^{-1} \end{cases}$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$.

2. En recherchant une application réciproque sous la même forme que Φ, montrer que Φ est un automorphisme de $\mathscr{L}(E)$.

Exercice 13
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de A.

2. Calculer AU puis en déduire $\mathrm{Ker}(A)$.

Exercice 14
On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & Q(X) = P(X+1) - P(X) \end{array}$

1. Montrer que f est linéaire.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_0[X]$. Calculer $f(P)$. f est-elle injective ?

3. Déterminer une base de l'image de f. f est-elle surjective ?

4. Déterminer un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ n'ayant pas d'antécédent par f.

Exercice 15
On considère l'application linéaire

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (2x+y+z, x+y+t, x+z-t) \end{array}$$

1. Déterminer une base du noyau de g.

2. Déterminer une base de l'image de g en utilisant le théorème du rang.

Exercice 16
On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on note f l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \dfrac{a+d}{2} \cdot I + \dfrac{b+c}{2} \cdot J \end{array}$$

1. Calculer $f(I)$ et $f(J)$.

2. Montrer que f est un endomorphisme.

3. Déterminer une base du noyau de f. f est-elle injective ?

4. En déduire le rang de f puis une base de l'image de f.

Exercice 17
E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, rapporté à une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de E défini par

$$f_a(e_2) = 0 \quad \text{et} \quad f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$$

1. Déterminer une base de $\text{Im}(f_a)$.

2. Montrer qu'une base de $\text{Ker}(f_a)$ est $(e_2, e_1 - e_3)$.

Exercice 18
Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.

2. Démontrer l'équivalence suivante :

$$\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$$

Isomorphisme

Exercice 19. *Isomorphismes*
Montrer que les applications suivantes sont des isomorphismes.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x-t, y+z, y-z, x+t) \end{array}$

2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P + P' \end{array}$

3. $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & TMT \end{array}$ avec $T \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible.

4. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P'(1), P''(0)) \end{array}$

Exercice 20

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0\}$.

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de E dont on déterminera la dimension.

b) Vérifier alors que l'application suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$$\varphi \ : \ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

2. On pose $Q_0(X) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Q_{n+1} = \varphi^{-1}(Q_n)$. Montrer que la famille $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 21
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ deux à deux distincts et P un polynôme réel de degré n.

1. Montrer que $(P, P', \ldots, P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. *a)* Démontrer que l'application suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$$\varphi \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & \big(P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)\big) \end{array}$$

b) Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Supposons :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \, P^{(i)}(a_k) \ = \ 0$$

Démontrer : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\lambda_i = 0$.

3. Démontrer que la famille $\big(P(X + a_o), \ldots, P(X + a_n)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 22

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.
On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f.

1. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que : $f^{(n-1)}(a) \neq 0_E$. En déduire que la famille $\big(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a)\big)$ est une base de E.

2. *a)* Démontrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

b) Démontrer que l'application suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathcal{C} & \to & E \\ & & g & \mapsto & g(a) \end{array}$$

c) Que dire de la dimension de $\mathcal{C}$?

3. Démontrer : $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1}\right)$.

Exercice 23

Soient A et B deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} f & : & A \times B & \to & E \\ & & (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$$

1. Montrer que l'application f est linéaire et déterminer son image et son noyau.

2. Montrer que $A \cap B$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont isomorphes (en tant qu'espaces vectoriels).

3. Déduire du théorème du rang :

$$\dim(A+B) \;=\; \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$$

Exercice 24

Démontrer que l'application suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & & P & \mapsto & P + P' + P'' \end{array}$$

Généralités sur les applications linéaires

Exercice 25

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

1. Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$, g_1, $g_2 \in \mathscr{L}(F, G)$, et h_1, $h_2 \in \mathscr{L}(G, E)$.

a) Montrer que si f est injective et si $f \circ h_1 = f \circ h_2$ alors $h_1 = h_2$.

b) Montrer que si f est surjective et si $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, alors $g_1 = g_2$.

2. **Application.**

Soient $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer $(AB)^2$ et en déduire BA.

Exercice 26

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces supplémentaires de E.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note p_i la projection sur F_i parallèlement à $\bigoplus\limits_{k \neq i} F_k$.

1. Montrer :

(i) $\mathrm{id}_E = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ *(ii)* $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \ \Rightarrow\ p_i \circ p_j = 0$

2. Soient p_1, …, p_n des endomorphismes de E vérifiant *(i)* et *(ii)*.
On note $F_i = \mathrm{Im}(p_i)$.

a) Montrer : $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} F_i$.

b) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'application p_i est la projection sur F_i parallèlement à $\bigoplus\limits_{k \neq i} F_k$.

Exercice 27

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Soit V un sous-espace vectoriel de E.

On note $\mathcal{A} = \{f \in \mathscr{L}(E, F) \mid V \subset \mathrm{Ker}(f)\}$.

Montrer que $\mathcal{A}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et calculer sa dimension.

Exercice 28

Soit $(a, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$. On considère l'application :

$$\begin{array}{cccl} f & : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & & P & \mapsto & (X-a)\big(P'(X)+P'(a)\big) - 2\big(P(X)-P(a)\big) \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie, puis que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On note $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ ses coordonnées dans la base $\big(1, X-a, \ldots, (X-a)^n\big)$.

a) Démontrer : $f(P) = \sum\limits_{i=2}^{n} (i-2)\, a_i\, (X-a)^i$.

b) En déduire le noyau et l'image de f.

3. *a)* En utilisant directement la définition de f, calculer, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $f\big((X-a)^i\big)$.

b) Retrouver alors les résultats de la question *2.*

Exercice 29

Soit $(u, v) \in \big(\mathscr{L}(E)\big)^2$. Supposons : $v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $u + v$ injectif.
Démontrer : $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) = \dim(E)$.

Exercice 30

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Supposons que u est de rang 1.
Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $u \circ u = \lambda \cdot u$.

Exercice 31

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Soient E_0, …, E_n des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $(u_0, \ldots, u_{n-1})$ un élément de $\mathscr{L}(E_0, E_1) \times \mathscr{L}(E_1, E_2) \times \cdots \times \mathscr{L}(E_{n-1}, E_n)$ tel que u_0 soit injective, u_{n-1} soit surjective et, pour tout $i \in [\![0, n-2]\!]$: $\mathrm{Im}(u_i) = \mathrm{Ker}(u_{i+1})$.
Démontrer :

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim(E_i) \;=\; 0$$

Exercice 32

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à 2. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. On suppose que f laisse stable toutes les droites vectorielles de E.
On désigne par $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

a) Vérifier que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que : $f(e_i) = \lambda_i\, e_i$.

b) Démontrer que, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $e_i + e_j$ est colinéaire à $f(e_i + e_j)$.

c) Montrer alors que les λ_i sont égaux.

d) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $f = \lambda \cdot \mathrm{id}_E$.

2. Supposons : $\forall g \in \mathscr{L}(E)$, $f \circ g = g \circ f$. Démontrer qu'il existe alors $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $f = \lambda \cdot \mathrm{id}_E$.

Formes linéaires et hyperplans

Exercice 33

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ surjective.

Soit H un sous-espace vectoriel de F.

Montrer que si H est un hyperplan de F, alors $u^{-1}(H)$ (sous-espace vectoriel de E) est un hyperplan de E.

Exercice 34

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ des formes linéaires sur E linéairement indépendantes. Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on note : $H_j = \mathrm{Ker}(\varphi_j)$.

1. Justifier que les espaces H_1, ..., H_p sont des hyperplans deux à deux distincts de E.

2. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & E & \to & \mathbb{K}^p \\ & & x & \mapsto & \big(\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)\big) \end{array}$$

a) Justifier que φ est linéaire, surjective et de noyau $H_1 \cap \cdots \cap H_p$.

b) En déduire : $\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_p) = n - p$.

Exercice 35

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n) \in E^n$.

On suppose : $\forall f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K}),\ f(e_1) = \cdots = f(e_n) = 0_E \ \Rightarrow \ f = 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{K})}$

Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.

Exercice 36

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une famille de formes linéaires sur E.

Démontrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) La famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre ;

(ii) $\varphi : x \in E \mapsto \big(f_1(x), \dots, f_p(x)\big) \in \mathbb{C}^p$ est surjective ;

(iii) $\exists (x_1, \dots, x_p) \in E^p,\ \det\big((f_i(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant p}\big) \neq 0$.

Exercice 37

Montrer que si H_1 et H_2 sont deux hyperplans d'un espace vectoriel E, alors H_1 et H_2 ont un supplémentaire commun dans E.

Exercice 38

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note e_i^* l'application qui à tout $x \in E$ associe la i-ème coordonnée de x dans $\mathscr{B}$.

Montrer que la famille $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.

2. Soit $\mathcal{C} = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.

a) Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccl} \psi & : & E & \to & \mathbb{K}^n \\ & & x & \mapsto & \big(\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)\big) \end{array}$$

est un isomorphisme.

b) En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de l'espace vectoriel E telle que $\mathcal{C} = \mathscr{B}^*$.

Exercice 39

Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle **trace** de M, et on note $\mathrm{tr}(M)$, la somme des coefficients diagonaux de M.

1. ***a)*** Montrer : $\mathrm{tr} \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$.

b) Montrer : $\forall (M, N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2,\ \mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$.

2. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$.

a) Montrer qu'il existe une unique $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \varphi(M) = \mathrm{tr}(AM)$$

b) On suppose de plus : $\forall (M, N) \in \big(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\big)^2,\ \varphi(MN) = \varphi(NM)$.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi = \lambda \cdot \mathrm{tr}$.