## Intégrales fonctions de leurs bornes

### Exercice 1

Dériver les fonctions suivantes.

**a.** $H_1 : x \mapsto \int_3^x e^{\sqrt{t}}\, dt$

**b.** $H_2 : x \mapsto \int_n^x e^{\sqrt{t}}\, dt$ où $n \in \mathbb{N}$

**c.** $H_3 : x \mapsto \int_x^{n^2} e^{\sqrt{t}}\, dt$ où $n \in \mathbb{N}$

**d.** $H_4 : x \mapsto \int_1^{x^2} e^{5\sqrt{3\ln t}}\, dt$

**e.** $H_5 : x \mapsto \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{1+t+t^2}$

**f.** $H_6 : x \mapsto \int_{-x}^{x} \sqrt{1+u^2}\, du$

**g.** $H_7 : x \mapsto \int_{\sqrt{x}}^{e^x} \frac{s}{\ln s}\, ds$

### Exercice 2

**1.** Démontrer : $\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant 1-\cos(t) \leqslant \frac{t^2}{2}$.

**2.** En déduire : $\lim\limits_{x\to 0^+} \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}\, dt = \ln(3)$.

### Exercice 3

On note $F : x \mapsto \int_x^{2x} \sqrt{1+t^4}\, dt$.

**a.** Donner l'ensemble de définition de $F$, puis donner le signe de $F$.

**b.** Montrer que pour tout $t \geqslant 0$ : $t^2 \leqslant \sqrt{1+t^4} \leqslant 1+t^2$.

**c.** En déduire un encadrement de $F(x)$, pour $x \in [0,+\infty[$.

**d.** Montrer alors que : $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{7}{3}x^3$.

**e.** Démontrer que $F$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle à préciser.

### Exercice 4

**1.** Démontrer : $\forall t \in [0,1],\ t \leqslant e^t - 1 \leqslant e\, t$.

**2.** En déduire : $\int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt \underset{t\to 0^+}{\sim} \ln(x)$.

### Exercice 5

Calculer la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2} \int_x^{x+\frac{1}{x}} e^{-u^2}\, du$.

### Exercice 6

On considère la fonction :

$$F : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \end{array}$$

**1.** Montrer que $F$ est impaire.

**2.** Montrer que $F$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Préciser la dérivée de $F$ et étudier ses variations.

**3.** **a)** Montrer que la restriction de $F$ sur $\mathbb{R}_+$ présente un maximum en un point dont on précisera le paramètre.

**b)** Déterminer, à l'aide de la méthode des trapèzes, une valeur de ce maximum avec une précision de $10^{-2}$.

**4.** **a)** Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2}$.

**b)** En déduire, si elle existe, la limite de $F$ en $+\infty$.

**5.** Donner l'allure du graphe de $F$.

**Exercice 7**

On considère la fonction : $F : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{-x}^{x} \sqrt{2-\big(\sin(t)\big)^2}\, dt \end{array}$

*1.* Montrer que $F$ est impaire.

*2.* Montrer que $F$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Préciser la dérivée de $F$ et étudier ses variations.

*3.* Calculer un développement limité de $F$ à l'ordre 3. Que peut-on en déduire sur le graphe de $F$ ?

*4.* *a)* Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) \geqslant 2x$.

*b)* En déduire, si elle existe, la limite de $F$ en $+\infty$.
La suite de la question a pour objectif de préciser ce résultat.

*c)* Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, justifier l'existence de $k \in \mathbb{N}$ tel que : $k\pi \leqslant x \leqslant (k+1)\pi$.
Puis démontrer :

$$F(x) = 2k \int_0^{\pi} \sqrt{2-\big(\sin(t)\big)^2}\, dt + 2\int_{k\pi}^{x} \sqrt{2-\big(\sin(t)\big)^2}\, dt$$

*d)* En déduire que la fonction $x \mapsto F(x) - \dfrac{F(\pi)\, x}{\pi}$ est bornée et trouver un équivalent de $F$ au voisinage de $+\infty$.

**Exercice 8**

On considère la fonction :

$$F : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{\cos(x)}^{\sin(x)} \sqrt{1-t^2}\, dt \end{array}$$

*1.* Déterminer le domaine de définition de $F$ et préciser son domaine d'étude.

*2.* Montrer que $F$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. Préciser la dérivée de $F$ et étudier ses variations.

*3.* Donner l'allure du graphe de $F$.

**Exercice 9**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction : $F : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\, dt \end{array}$

*1.* Justifier : $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$. Préciser la dérivée de $F$ et étudier ses variations.

*2.* *a)* Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) \geqslant \dfrac{1}{1+x^n} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t\, dt$.

*b)* En déduire, si elle existe, la limite de $F$ en $+\infty$.

*3.* Démontrer que $F$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même. On désignera sa bijection réciproque par $G$.

*4.* Montrer que $G$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle : $y' = \dfrac{1+y^n}{\mathrm{e}^y}$.

**Exercice 10**

On considère la fonction : $F : \begin{array}{rcl} [-2\pi, 2\pi] \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}\, dt \end{array}$

*1.* Montrer que $F$ est paire.

*2.* *a)* Démontrer : $F(\pi) = \displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{(u+2\pi)^2} - \frac{1}{(u+\pi)^2}\right) \sin(u)\, du$.

*b)* En déduire le signe de $F(\pi)$.

*3.* En s'inspirant de la question précédente, déterminer le signe de $F(2\pi)$.

*4.* *a)* Montrer que $F$ est indéfiniment dérivable sur son ensemble de définition. Préciser la dérivée de $F$ et étudier ses variations.

*b)* Montrer alors que $F$ s'annule exactement quatre fois et isoler chacun de ses points d'annulation.

*5.* *a)* Vérifier : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\big|\sin(t) - t\big| \leqslant \dfrac{t^3}{6}$.

*b)* En déduire que $F$ se prolonge par continuité en 0 en une fonction $G$.

*c)* Préciser la valeur prise par la fonction $G$ en 0, puis montrer que $G$ est continûment dérivable sur $[-2\pi, 2\pi]$.

## Découpage de l'intervalle

**Exercice 11**
Calculer les intégrales suivantes.

**a.** $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{11}} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}\, dx$

**b.** $\displaystyle\int_{-2}^{5} \frac{|x+1|}{|x|+1}\, dx$

## Sommes de Riemann

**Exercice 12**
Calculer les limites des suites ci-dessous.

**a.** $\displaystyle u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$

**b.** $\displaystyle v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$

**c.** $\displaystyle w_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n\, n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

**Exercice 13**
Calculer, en utilisant une somme de Riemann, les intégrales de $x \mapsto x$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto \sin(\pi\, x)$ sur $[0,1]$.

**Exercice 14**
Soit $x \in \,]-1, +\infty[$.

***1.*** Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - 2x\, \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + x^2\right) \;=\; \frac{(x-1)\,(x^{2n}-1)}{x+1}$$

***2.*** En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2x\, \cos(t) + x^2\right)\, dt$.

**Exercice 15**
Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites suivantes.

***1.*** $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

***2.*** $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2\,(k^3+n^3)^{\frac{1}{3}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

***3.*** $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\, \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

***4.*** $\displaystyle\left(\left(\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{k}\right)^{\frac{1}{n^2}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

***5.*** $\displaystyle\left(\left(\frac{(2n)!}{n!\, n^n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

***6.*** $\displaystyle\left(\ln(n) - \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(p+n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

**Exercice 16**
Soit $f \in \mathcal{C}^0\big([0,1], \mathbb{R}_+^*\big)$. On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccl} F & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt \end{array}$$

***1.*** Montrer que $F$ induit une bijection continue à réciproque continue de $[0,1]$ sur $F\big([0,1]\big)$.

***2.*** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, il existe un unique $x_{n,p} \in [0,1]$ tel que :

$$\int_0^{x_{n,p}} f(t)\, dt \;=\; \frac{p}{n} \int_0^1 f(t)\, dt$$

***3.*** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\displaystyle S_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} f(x_{n,p})$. Démontrer :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \left(\int_0^1 \big(f(t)\big)^2\, dt\right) \left(\int_0^1 f(t)\, dt\right)^{-1}$$

**Exercice 17**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$

***1.*** Vérifier, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ : $\left|\sin(x) - x\right| \leqslant \frac{x^3}{6}$.

***2.*** Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $\left|u_n - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{6n^2}$.

***3.*** Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

## Sommation discrète et intégration

**Exercice 18**

On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{\ln(x)}{x^2} \end{array}$$

***1.*** Étudier les variations de $f$.

***2.*** Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on pose : $u_n = \sum\limits_{p=2}^{n} f(p)$.

***a)*** Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$, comparer $u_n$ et la valeur de l'intégrale $I_n$ de la restriction de $f$ sur $[1,n]$.

***b)*** Majorer la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

***c)*** En déduire le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

**Exercice 19**

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{nk}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

## Croissance de l'intégrale

**Exercice 20**

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0\big([a,b]\big)$. Démontrer :

$$\int_{[a,b]} |f| \;=\; \left|\int_{[a,b]} f\right| \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ positive ou négative}$$

Le résultat est-il encore vrai si $f$ est seulement continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ ?

**Exercice 21**

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$. Soient $f$ et $g$ deux fonctions réelles définies et continues sur $[a,b]$.

***1.*** On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_a^b \big(f(t) + x\,g(t)\big)^2 \, dt \end{array}$$

Montrer que $\varphi$ est une fonction polynomiale positive et que, sauf dans un cas particulier que l'on identifiera, son degré est 2.

***2.*** Établir, dans tous les cas, la formule :

$$\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b \big(f(t)\big)^2\,dt \int_a^b \big(g(t)\big)^2\,dt}$$

***3.*** Démontrer : $\sqrt{\displaystyle\int_a^b \big(f(t)+g(t)\big)^2\,dt} \leqslant \sqrt{\displaystyle\int_a^b \big(f(t)\big)^2\,dt} + \sqrt{\displaystyle\int_a^b \big(g(t)\big)^2\,dt}$.

**Exercice 22**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{C}^0\big([0,1]\big)$.

*1.* On suppose que $f$ s'annule au plus $n$ fois.

*a)* Justifier l'existence d'une fonction polynomiale $P$ de degré au plus $n$ dont les racines sont les points d'annulation de $f$ en lesquels la fonction $f$ « change de signe » et sont simples.

*b)* Montrer alors que l'intégrale de $f \times P$ sur $[0,1]$ est nulle.

*2.* On suppose que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^k\, f(x)\ dx$ est nulle. Démontrer que la fonction $f$ admet au moins $n+1$ points d'annulation.

**Exercice 23**
Soit $f \in \mathcal{C}^0\big([0,\pi]\big)$.

*1.* On suppose que $f$ ne s'annule pas sur $]0,\pi[$. Montrer que l'intégrale de la fonction $x \mapsto f(x)\, \sin(x)$ est non nulle.

*2.* On suppose qu'il existe $\alpha \in\, ]0,\pi[$ tel que la restriction de $f$ sur $[0,\alpha]$ ne prenne que des valeurs positives et la restriction de $f$ sur $[\alpha,\pi]$ ne prenne que des valeurs négatives.

*a)* Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la restriction sur $[0,\pi]$ de $x \mapsto \sin(x) + \lambda\, \cos(x)$ s'annule une unique fois, au point $\alpha$.

*b)* Montrer que l'intégrale sur $[0,\pi]$ de la fonction $x \mapsto \big(\sin(x) + \lambda\, \cos(x)\big)\, f(x)$ est nulle si et seulement si $f$ l'est.

*3.* On suppose :

$$\int_0^\pi f(x)\, \sin(x)\ dx \ = \ \int_0^\pi f(x)\, \cos(x)\ dx \ = \ 0$$

Montrer que $f$ s'annule au moins deux fois.

## Autour de la formule de Taylor

**Exercice 24**
Étudier le comportement asymptotique de la suite $\left((n+1)!\left(\mathrm{e} - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exercice 25**
Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on pose : $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 t^n\, (1-t)^p\ dt$.

*1.* Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, exprimer $I_{n,p}$ en fonction de $I_{n+1,p-1}$.
En déduire, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, une expression explicite de $I_{n,p}$.

*2.* En interprétant, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $I_{n,p}$ comme le reste dans une formule de Taylor-Lagrange, retrouver le résultat de la question précédente.

**Exercice 26**
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que $|f|$ et $|f''|$ soient majorées respectivement par $M$ et $M''$.

*1.* *a)* En appliquant deux fois une inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $f$ à l'ordre 2, montrer que pour tout réel strictement positif $a$ :

$$\big|2a\, f'(0) + f(-a) - f(a)\big| \ \leqslant\ M''\, a^2$$

*b)* En déduire : $\big|f'(0)\big| \leqslant 2\sqrt{M\, M''}$.
*(on pourra utiliser une valeur particulière de a dans l'estimation précédente)*

*2.* En appliquant la question précédente aux fonctions $t \mapsto f(t+x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $|f'|$ est bornée et majorer alors sa borne supérieure par un réel ne dépendant que des bornes supérieures de $|f|$ et $|f''|$.

## Calculs de primitives et d'intégrales

**Exercice 27**

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0\big([a,b]\big)$ telle que : $\forall x \in [a,b],\ f(a+b-x) = f(x)$.

***1.*** Démontrer : $\displaystyle\int_a^b t\,f(t)\ dt = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t)\ dt$.

***2.*** Calculer alors : $\displaystyle\int_0^\pi \frac{t\ \sin(t)}{1+\big(\cos(t)\big)^2}\ dt$.

**Exercice 28**

Calculer les intégrales suivantes.

***a.*** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\mathrm{e}^x+1}$ $\left(\begin{array}{l}\text{Changement de variable : } u = \mathrm{e}^x \\ \textit{i.e.} \quad \varphi : u \mapsto \ln u\end{array}\right)$

***b.*** $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x}}$ $\left(\begin{array}{l}\text{Changement de variable : } u = \sqrt{x} \\ \textit{i.e.} \quad \varphi : u \mapsto u^2\end{array}\right)$

***c.*** $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}} dx$ $\left(\begin{array}{l}\text{Changement de variable : } u = \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \\ \textit{i.e.} \quad \varphi : u \mapsto (\ln u)^2\end{array}\right)$

***d.*** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$ $\left(\begin{array}{l}\text{Changement de variable : } u = \sqrt{1+\mathrm{e}^x} \\ \textit{i.e.} \quad \varphi : u \mapsto \ln(u^2-1)\end{array}\right)$

***e.*** $\displaystyle\int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}\ dx$ $\left(\begin{array}{l}\text{Changement de variable : } u = \sqrt{x^3+1} \\ \textit{i.e.} \quad \varphi : u \mapsto (u^2-1)^{\frac{1}{3}}\end{array}\right)$

***f.*** $\displaystyle\int_8^{27} \frac{1}{1+\sqrt{x^3}}\ dx$ $\left(\begin{array}{l}\text{Changement de variable : } u = \sqrt[3]{x} \\ \textit{i.e.} \quad \varphi : u \mapsto u^3\end{array}\right)$

***g.*** $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\ dx$ $\left(\begin{array}{l}\text{Changement de variable : } u = \sqrt{x} \\ \textit{i.e.} \quad \varphi : u \mapsto u^2\end{array}\right)$

**Exercice 29**

Calculer les intégrales suivantes par changement de variable.
*(changement non précisé !)*

***a.*** $\displaystyle\int_3^4 \frac{t}{\sqrt{t-2}}\ dt$

***b.*** $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{t\sqrt{2t+1}}\ dt$

***c.*** $\displaystyle\int_2^3 \ln(\sqrt[3]{t}-1)\ dt$

***d.*** $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t\sqrt{t+1}}$

**Exercice 30**

En faisant les changements de variables indiqués, calculer les primitives des fonctions suivantes.

***1.*** $\begin{array}{ccc} ]0,\frac{\pi}{3}[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(3x)}\end{array}$ et poser $t = \cos(x)$.

***2.*** $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2\,\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x)+1}\end{array}$ et poser $t = \mathrm{e}^x$.

***3.*** $\begin{array}{ccc} ]2,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x+\sqrt{x-2}}\end{array}$ et poser $t = \sqrt{x-2}$

***4.*** $\begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{3\,\sin(x)+1}\end{array}$ et poser $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

***5.*** $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\cos^3(x)\ \sin^3(x)}{1+\sin^2(x)}\end{array}$ et poser $t = \cos(2x)$.

**Exercice 31**

Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. On considère la fonction $f : t \mapsto \sqrt{1 + \varepsilon\, t^2}$.

*1.* À l'aide du changement de variable $t = \sin(u)$, trouver une primitive de $f$ considérée sur $]-1, 1[$ lorsque $\varepsilon = -1$.

*2.* À l'aide du changement de variable $t = \mathrm{sh}(u)$, trouver une primitive de $f$ considérée sur $\mathbb{R}$ lorsque $\varepsilon = 1$.

*3.* À l'aide d'une intégration par parties judicieuse, retrouver les résultats des questions précédentes.

**Exercice 32**

Pour tout $x \in\, ]-1, +\infty[$, on pose : $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$.

*1.* Pour tout $x \in\, ]-1, +\infty[$, donner une expression explicite de $I(x)$.

*2.* Pour tout $x \in\, ]-1, +\infty[$, calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(1+t^3)^2}$ en fonction de $x$ et de $I(x)$.

*3.* Pour tout $(x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{y^3+t^3}$ en fonction de $x$, $y$ et de valeurs prises par la fonction $I$.

**Exercice 33**

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on pose : $I(x) = \displaystyle\int_0^\pi \ln\left(1 - 2x\, \cos(t) + x^2\right)\, dt$.

*1.* Montrer que la fonction $I$ est paire.

*2.* Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ I(x^2) = 2\, I(x)$.

*3.* Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\},\ I\left(\dfrac{1}{x}\right) = I(x) - 2\pi\, \ln\left(|x|\right)$.

*4.* Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ \left|I(x)\right| \leqslant 2\pi\, \ln\left(1 + |x|\right)$.

*5.* Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, calculer $I(x)$.