Notations du cours : manipulations

Exercice 1
Calculer les quantités suivantes.

a. $27!/24!$ ***b.*** A_{10}^3 ***c.*** $7!$ ***d.*** $\binom{10}{3}$

Parties d'un ensemble fini

Exercice 2
Donner le cardinal des ensembles suivants, puis expliciter tous leurs éléments.

a. $\mathcal{P}(\varnothing)$

b. $\mathcal{P}(\{5\})$

c. $\mathcal{P}(\{1,4\})$

d. $\mathcal{P}(\{1,3,4,5\})$

e. $\mathcal{P}(\{\{1\},2,4\})$

Exercice 3
Les énoncés suivants sont-ils vrai ou faux ? Justifier vos réponses.

a. $2 \in \{3,\{2\},\{\{4\}\},\varnothing\}$

b. $\{1\} = \{\{1\}\}$

c. $3 \in \varnothing$

d. $\varnothing \in \{\varnothing\}$

e. $\varnothing \subset \mathcal{P}(\{1\})$

f. $\varnothing \in \{1\}$

g. $\{\{3\}\}$ a un élément.

h. $\{n \in \mathbb{N} \ / \ 82 \leqslant n \leqslant 98 \text{ et } \exists k \in \mathbb{N}, n = k^2\} = \varnothing$

Exercice 4
On considère un ensemble E a 6 élements. On cherche à calculer le nombre de couples (A,B) de parties de E telles que $A \cup B = X$.

a. Combien y a-t-il de parties de E à deux éléments ? Si A est une partie à deux éléments, combien y a-t-il de parties B telles que $A \cup B = E$?

b. Plus généralement, combien y a-t-il de parties A à k éléments ? Une telle partie A étant donnée, combien y a-t-il de B qui conviennent ?

c. En déduire la solution du problème.

d. Si on remplace 6 par un n quelconque, que devient la solution ?

Exercice 5
Soit n un entier strictement positif et $E = \{1,2,\dots,n\}$.

a. Trouver le nombre de couples (x,y) de E^2 tels que $x > y$.

b. Trouver le nombre de couples (x,y) de E^2 tels que $x = y$.

c. Trouver le nombre de triplets (x,y,z) de E^3 tels que $x < y < z$.

Dénombrement : cas pratiques

Exercice 6
On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.
Combien y a-t-il de tirages vérifiant les conditions suivantes ?

a. Aucune condition.

b. Il y a au moins un pique parmi les cinq cartes.

c. Il y a exactement deux valets.

d. Il y a exactement un as et deux carreaux.

e. Il n'y a pas de carte en dessous de 9.

f. Les cinq cartes forment deux paires (mais pas de brelan).

g. Les cinq cartes sont de la même couleur.

h. Les cinq cartes forment une quinte flush (suite de même couleur).

Exercice 7
On tire 5 atouts dans un jeu de tarot.
Combien y a-t-il de tirages vérifiant les conditions suivantes ?

a. Au moins un atout est multiple de 5.

b. Il y a exactement un multiple de 5 et un multiple de 3.

c. On a tiré le 1 ou le 21.

Exercice 8
À l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de douze touches :

- × trois lettres : A, B et C
- × neuf chiffres non nuls : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9

Le code déclenchant l'ouverture de la porte peut être changé par le régisseur. Ce code est formé d'une lettre suivie d'un nombre de trois chiffres.

a. Dans cette question, on considère que les trois chiffres du code ne sont pas forcément distincts. Combien de codes commençant par la lettre A le régisseur peut-il proposer ?

b. Dans cette question, on considère que le code ne contient que des chiffres distincts. Combien de codes le régisseur peut-il proposer ?

Exercice 9
Étant donné un groupe de k personnes choisies au hasard, quelle est la probabilité que deux d'entre elles fêtent leur anniversaire le même jour ?
(on considère que l'année compte 365 *jours, on néglige les années bissextiles)*

Exercice 10
De combien de manières peut-on classer quatre personnes (sans qu'il y ait d'ex-æquo) ? Et si les ex-æquo sont possibles ?

Exercice 11
Combien y a-t-il d'anagrammes de MAISON ? de RADAR ? de MISSISSIPI ? de ABRACADABRA ?

Exercice 12
Trois locataires laissent, en sortant, la clé numérotée de leur appartement à la gardienne de l'immeuble. Celle-ci s'amuse à enlever les numéros et rend au hasard les clés aux trois personnes à leur retour. On notera R_i ($i \in [\![1, 3]\!]$) l'ensemble des répartitions telles que le i-ème locataire retrouve sa clé.

1) Décrire l'ensemble $R_1 \cap \overline{R_3}$.

2) Écrire en fonction de R_1, R_2 et R_3 :

- ***a.*** l'ensemble A des répartitions telles que les trois personnes retrouvent leur clé.
- ***b.*** l'ensemble B des répartitions telles que deux personnes seulement retrouvent leur clé.
- ***c.*** l'ensemble C des répartitions telles que le premier locataire est le seul à retrouver sa clé.
- ***d.*** l'ensemble D des répartitions telles qu'une personne seulement retrouve sa clé ?

3) Déterminer le cardinal des ensembles de la question précédente.

Exercice 13
On monte un escalier de n marches. À chaque pas, on franchit soit une marche, soit deux marches. On note p_n le nombre de façon d'arriver à la n-ième marche et on voudrait expliciter la suite (p_n).

a. Que valent p_1 et p_2 ?

b. Déterminer une relation de récurrence liant p_n, p_{n-1} et p_{n-2}.

c. En déduire une expression de p_n en fonction de n.

d. On appelle k le nombre de pas de deux marches qu'on a fait en gravissant l'escalier. Quelles sont les valeurs possibles pour k ?

e. Calculer en fonction de k le nombre total de pas nécessaires.

f. Déterminer le nombre de façon de grimper l'escalier, sachant qu'on a fait k pas de deux marches.

g. En déduire une expression de p_n sous forme d'une somme.

Formule du crible

Exercice 14

Une tentative d'homicide par balle a eu lieu au cours d'un bal. La police a retrouvé dix-huit personnes présentes au moment du drame. Elle leur a demandé de répondre soit par oui, soit par non, à chacune des questions suivantes :

a. Avez-vous entendu une détonation ?

b. Avez-vous vu quelqu'un s'enfuir ?

× Dix personnes ont répondu « oui » à la première question.

× Six personnes ont répondu « non » à la deuxième question.

× Cinq personnes ont répondu « non » aux deux questions.

Combien de personnes ont répondu « oui » aux deux questions ?

Exercice 15

On considère une classe de 36 élèves qui étudient tous au moins une langue parmi l'anglais, l'espagnol et l'allemand. On sait que :

a. 22 élèves étudient l'anglais, 22 étudient l'allemand, 18 étudient l'espagnol

b. 10 élèves étudient à la fois l'anglais et l'allemand, 9 étudient à la fois l'allemand et l'espagnol, 11 à la fois l'anglais et l'espagnol

Combien d'élèves étudient les trois langues ?

Nombre d'applications

Exercice 16

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

Exercice 17

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

Montrer que le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ est $\dbinom{n}{p}$.

Exercice 18

a. Combien y a-t-il de suites composées de 5 éléments de $[\![1, 10]\!]$?

b. Combien y a-t-il de suites composées de 5 éléments distincts de $[\![1, 10]\!]$?

c. Combien y a-t-il de suites strictement croissantes composées de 5 éléments de $[\![1, 10]\!]$?

d. Généraliser les questions précédentes pour des suites possédant n éléments dans l'ensemble $[\![1, p]\!]$.

Exercice 19

Dans cet exercice, on souhaite déterminer le nombre d'applications croissantes de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$.

1) Démontrer que ce nombre est égal au nombre de suites croissantes composées de n éléments de $[\![1, p]\!]$.

On propose maintenant de coder une telle suite croissante par la suite de symboles suivante :

× on écrit succesivement chaque 1 utilisé (éventuellement aucun) et on termine par une barre | ,

× on écrit succesivement chaque 2 utilisé (éventuellement aucun) et on termine par une barre | ,

× ...

× on écrit succesivement chaque p utilisé (éventuellement aucun) et on s'arrête sans écrire de | à la fin.

2) Combien y a-t-il de symboles | utilisés dans ce codage ?

3) Quelles sont les applications représentées par les codages suivants ?

a. 1|2|333	***b.*** 111||33	***c.*** |22222|	***d.*** 11|22|3

4) Conclure quant au nombre d'applications croissantes de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$.

Cœfficients binomiaux

Exercice 20

Développer les expressions suivantes.

a. $(2-x)^5$

b. $(3x+2t)^3$

c. $(x-1)^8$

d. $(x+1)^6+(x-1)^6$

Exercice 21

Quel est le plus grand terme du binôme $(2+3)^{59}$?

Exercice 22

Développer ou simplifier les expressions suivantes.

a. $(3-\sqrt{5})^6$

b. $(1+\sqrt{2})^4$

c. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$

d. $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}$

e. $\sum\limits_{k=0}^{n}k(n-k)\binom{n}{k}$

f. $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

g. $\sum\limits_{k=0}^{n}k(k+1)\binom{n}{k}$

Exercice 23

Simplifier les expressions suivantes.

a. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k$

b. $\sum\limits_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$

c. $\sum\limits_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}$

d. $\sum\limits_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}$

e. $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{3^k}$

f. $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}$

g. $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1}$

Exercice 24

Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall p\in[\![0,n]\!],\quad \binom{n}{p}=\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-2}{p-1}+\cdots+\binom{p-1}{p-1}$$

Exercice 25

a. En utilisant l'identité $(1+x)^{p+q}=(1+x)^p\times(1+x)^q$, démontrer que :

$$\binom{p+q}{p}=\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\binom{q}{p-i}$$

b. Donner une démonstration combinatoire de cette égalité en considérant une ensemble E à p éléments et un ensemble F à q éléments.

c. En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

Exercice 26

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, et $p\in\mathbb{N}$. On note B_n^p le nombre de n-uplets d'entiers naturels $(x_1,\dots,x_n)$ tels que $x_1+\cdots+x_n=p$.

a. Pour $p\in\mathbb{N}$, calculer B_1^p en fonction de p.

b. Soit $n\geqslant 2$. Justifier l'égalité : $B_n^p=\sum\limits_{k=0}^{p}B_{n-1}^k$.

c. En utilisant le résultat de l'exercice 24, montrer par récurrence sur n que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall p\in[\![0,n]\!],\quad B_n^p=\binom{n+p-1}{p}$$

Couples dans le plan

Exercice 27

Combien y a-t-il de couples (i,j) :

1. dans $[\![1,n]\!]^2$ pour lesquels : $i+j=n$?

2. dans $[\![1,n]\!]^2$ pour lesquels : $i<j$?

3. dans $[\![1,n]\!]\times[\![1,2n]\!]$ pour lesquels : $i<j$?

4. dans $[\![1,n]\!]^2$ pour lesquels : $|i-j|\leqslant 1$?