Sous-espace vectoriel

Exercice 1

Pour chacun des espaces vectoriels E et des parties F, dire si F est un sous-espace vectoriel de E.

a) E est l'ensemble des fonctions $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ($= \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$).
F est l'ensemble des fonctions paires.

b) E est l'ensemble des suites réelles.
F est l'ensemble des suites divergentes.

c) E est l'ensemble des suites réelles.
F est l'ensemble des suites convergentes.

d) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
F est l'ensemble des fonctions f vérifiant $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.
(autrement dit, des fonctions f telles que $f(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(x)$).

e) $E = \mathbb{R}[X]$, ensemble des polynômes.
F est l'ensemble contenant le polynôme nul et les polynômes de degré supérieur ou égal à 3.

f) $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites à coefficients complexes.
$F = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \text{la série } \sum u_n \text{ est divergente}\}$.

g) $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites à coefficients complexes.
$F = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \text{la série } \sum u_n \text{ est convergente}\}$.

h) $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites à coefficients complexes.
$F = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \text{la série } \sum u_n \text{ est absolument convergente}\}$.

i) $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites à coefficients complexes.
$F = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \text{la série } \sum u_n \text{ est à termes positifs}\}$.

Espaces vectoriels dans $\mathbb{K}^n$

Exercice 2

Déterminer une base et la dimension des sev de $\mathbb{R}^3$ suivants :

a) $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$.

b) $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \mid -x - y + z = 0 \text{ et } 2x + y - 5z = 0\}$.

c) Compléter la base de F_1 en une base de $\mathbb{K}^3$.

d) Compléter la base de F_2 en une base de $\mathbb{K}^3$.

Exercice 3

Pour chaque famille A_k suivante, déterminer si elle est libre, le rang de la famille, puis si c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

a) $A_1 = \big((1,2),(1,-1)\big)$.

b) $A_2 = \big((1,4)\big)$.

c) $A_3 = \big((0,0)\big)$.

d) $A_4 = \big((1,-2),(2,3),(1,0)\big)$.

Espace vectoriel défini par un système d'équations linéaires

Exercice 4

1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

a) $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\right\}$

b) $B = \left\{(x+y, x-y, 2y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

c) $C = \left\{(2x-3y, x+1, -x+3y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

d) $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = y \text{ et } y = 3z\right\}$.

2. Soit A une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels.
Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $AX = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, est un espace vectoriel réel.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$ est-il un espace vectoriel réel ?

Exercice 5
Donner une base du sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ formé des solutions (x, y, z, t) du système suivant.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & - & t & & & = & 0 \\ x & - & 3y & & & + & 9z & = & 0 \\ 3x & - & 4y & - & t & + & 18z & = & 0 \end{array}\right.$$

Espaces vectoriels de polynômes

Exercice 6
On note $E = \mathbb{R}_4[X]$.

- On dit qu'un polynôme P est pair s'il définit une fonction polynomiale paire *i.e.* si : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = P(-x)$.
  On définit de manière similaire les polynômes impairs.
- Si F et G sont deux ev, on note $F + G = \{u + v \mid u \in F\ v \in G\}$.

a) Montrer que l'ensemble F des polynômes pairs de E est un sous-espace vectoriel de E, et en donner une base.

b) Même question avec l'ensemble G des polynômes impairs de E.

c) Montrer : $E = F \oplus G$.

Exercice 7

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille :

$$(X,\ X(X-1),\ X(X-1)(X-2),\ \dots,\ X(X-1)\dots(X-n))$$

est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

On peut généraliser le résultat obtenu dans la question précédente. On dit qu'une famille finie de polynôme $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ est **échelonnée en degré** lorsque les polynômes $P_1, P_2, \dots, P_n$ sont de degrés deux à deux distintcs.

b) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que toute famille de n polynômes non nuls et de degrés echelonnés est libre dans $\mathbb{R}[X]$.
(quitte à renuméroter les polynômes, on pourra supposer : $\deg(P_1) < \deg(P_2) < \dots < \deg(P_n)$*)*

Exercice 8
Déterminer si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.
Si oui, en donner une base et la dimension.

a) $H_1 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \forall x \in \mathbb{R},\ 2P(x) - xP'(x) = 0\}$.

b) $H_2 = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) + 5P'(x) + 3x = 0\}$.

c) $H_3 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 2\,P(1)\}$.

d) $H_4 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$.

e) $H_5 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 1\}$.

f) $H_6 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(0) = 0\}$.

g) $H_7 = \big\{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) - (x-1)P'(x) = (2x^2 - 3x + 4)P''(x)\big\}$.

h) $H_8 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \geqslant 3\}$

Exercice 9
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$.

a) Montrer que $(1, 1+X, (1+X)^2, (1+X)^3)$ en est une base.

b) Quelles sont les coordonnées de X^3 dans cette base ?

c) Montrer que :
$((X-1)(X-2)(X-3), X(X-2)(X-3), X(X-1)(X-3), X(X-1)(X-2))$
est aussi une base.

d) Quelles sont les coordonnées de X^3 dans cette base ?

Exercice 10
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $(X^{n-k}(1-X)^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ suivante :

$$(X^n, X^{n-1}(1-X), X^{n-2}(1-X)^2, \dots, X(1-X)^{n-1}, (1-X)^n)$$

a) Montrer que cette famille forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer les coordonnées de 1 et de $\left(X - \dfrac{1}{2}\right)^n$ dans cette base.

Espaces vectoriels de suites

Exercice 11

On considère E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

a) Montrer que E est un espace vectoriel réel.

b) Montrer que $((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}})$ forme une famille libre de E.

c) En déduire la dimension de E.

Exercice 12

1. Montrer que $E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_{n+2} - 2u_n\right\}$ est un espace vectoriel réel.

2. Parmi les ensembles suivants, quels sont ceux qui ont une structure d'espace vectoriel réel ? Justifier votre réponse.

- ***a)*** L'ensemble des suites réelles à termes positifs.
- ***b)*** L'ensemble des suites réelles bornées.
- ***c)*** L'ensemble des suites réelles convergentes.
- ***d)*** L'ensemble des suites réelles divergentes.
- ***e)*** L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 13

Soit $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = \frac{3}{4}u_{n+2} + \frac{3}{2}u_{n+1} + u_n\}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension.

2. Déterminer la dimension de l'ensemble des éléments de E ayant pour limite 0.

Espaces vectoriels de fonctions

Exercice 14

a) Montrer que $E = \left\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x)\right\}$ est un espace vectoriel réel.

b) Montrer que $F = \left\{f \in \mathcal{C}^0([0,1]\,,\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t)\,dt = 0\right\}$ est un espace vectoriel réel.

Exercice 15

On considère l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ à valeurs réelles.
On définit les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f_1(x) = \ln(x),\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = \mathrm{e}^x,\ f_4(x) = \mathrm{e}^{x+3},\ f_5(x) = \frac{1}{x}$$

a) La famille $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ est-elle une famille libre de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$?

b) Déterminer une base de $\operatorname{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$.

Exercice 16

On note $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel réel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles.

a) Montrer que $\mathscr{C}$ est un espace vectoriel réel.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = e^{nx}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est libre dans $\mathscr{C}$.
En déduire que l'espace vectoriel $\mathscr{C}$ n'est pas de dimension finie.

c) En déduire que l'espace vectoriel $\mathscr{F}$ n'est pas de dimension finie.

Remarque

- À l'aide d'un raisonnement analogue, on montre que l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie, en remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est libre.
- De même, on montre que l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles n'est pas de dimension finie, en montrant, par exemple, que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la famille $((1)_{n\in\mathbb{N}},\ (2^n)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots,\ (p^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Espaces vectoriels de matrices

Exercice 17

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices réelles carrées d'ordre 2.

a) $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid a = 2c \right\}$

b) $B = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x-y \\ y & x+2y \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

c) $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + b = 1 \right\}$

Exercice 18

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre n :

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M \right\}$$

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques réelles d'ordre n :

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = -M \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Justifier que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont de dimension finie.
On note alors $\mathscr{B}_s$, respectivement $\mathscr{B}_a$, une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, resp. de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question seulement, on suppose que $n = 3$.

a) Déterminer une base $\mathscr{B}_s$ de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. En déduire la dimension de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

b) Déterminer une base $\mathscr{B}_a$ de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. En déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

4. Montrer : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

5. Déterminer $\dim\big(S_n(\mathbb{R})\big)$, puis $\dim\big(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\big)$.

Exercice 19

On considère, pour toute matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles :

$$E_1(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid A\,M = M\}$$
$$\text{et} \quad E_2(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^2M = AM\}$$

Partie 1

1. Montrer que $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont des espaces vectoriels réels.

2. ***a)*** Établir : $E_1(A) \subset E_2(A)$.

b) Montrer que si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$.

3. ***a)*** Établir que, si $A - I$ est inversible, alors $E_1(A) = \left\{0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\right\}$.

b) Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$.

Partie 2

On considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $F_2 = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid CX = 2X\}$ est un espace vectoriel réel. Déterminer une base de F_2.

2. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.

3. Calculer la matrice $D = P^{-1}CP$.

4. ***a)*** Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer : $M \in E_1(C) \Leftrightarrow P^{-1}M \in E_1(D)$.

b) Montrer que, pour tout $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $N \in E_1(D)$ si, et seulement si, il existe trois réels a, b, c tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) En déduire l'expression générale des matrices de $E_1(C)$ et déterminer une base de $E_1(C)$. Quelle est la dimension de $E_1(C)$?

d) Déterminer de même la dimension de $E_2(C)$. A-t-on $E_1(C) = E_2(C)$?

5. ***a)*** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $C^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de la matrice C^n en fonction de n.

Exercice 20
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.
Déterminer si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.
Si oui, en donner une base et la dimension.

a) L'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

b) L'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = MB$.

c) L'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = B$.

d) L'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AM = M$.

Exercice 21
On considère $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a & b \\ a-b & b & a \\ 2a & 2b & 2a-b \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel réel.

b) Déterminer la dimension de $\mathcal{E}$.

Union, intersection et somme d'ev

Exercice 22
On considère : $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + 4z = 0\big\}$ et $G = \text{Vect}\,((1,0,0))$.

1. Montrer que F et G sont deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer une base $\mathscr{B}_F$ de F et une base $\mathscr{B}_G$ de G.
En déduire la dimension de F et la dimension de G.

3. Soit un vecteur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
Montrer qu'il existe un unique couple de vecteurs $(u,v) \in F \times G$ tel que $(a,b,c) = u + v$.

Exercice 23
Soit E un espace vectoriel réel.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

a) Démontrer que $F \cap G$ de F et G est un sous-espace vectoriel de E.

b) Démontrer que, de manière générale, $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

c) Démontrer l'équivalence :

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \quad \Leftrightarrow \quad (F \subset G \ \texttt{OU} \ G \subset F)$$

Théorème de la base incomplète

Exercice 24
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On cherche à établir la formule suivante :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

où $F + G$ est le sous-espace vectoriel défini par :

$$F + G = \{u + v \mid u \in F \text{ et } v \in G\}$$

On note $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $F \cap G$.

a) Montrer qu'il existe une base de F de la forme $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$.
Montrer de même qu'il existe une base de G de la forme $(e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_r)$.

b) Montrer que $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_r)$ est une base de $F + G$.

c) Conclure.

Sommes de sous-espaces vectoriels

Exercice 25
Dans l'espace E des fonctions continues de $[-1, 1]$ vers $\mathbb{R}$, on considère les sous-espaces :

× F_1 des fonctions constantes,

× F_2 des fonctions nulles sur $[-1, 0]$,

× F_3 des fonctions nulles sur $[0, 1]$.

Montrer : $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

Exercice 26

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on note :

$$F_i = \{P \in E \mid \forall j \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\},\ P(j) = 0\}$$

Montrer que les F_i sont des droites vectorielles et : $E = F_0 \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$.

Exercice 27

Soient F, G, F', G' des sous-espaces d'un espace vectoriel E.

On suppose : $E = F \oplus G = F' \oplus G'$ et $F' \subset F$.

Montrer : $E = F' \oplus G \oplus (F \cap G')$.