Étude de fonctions

Exercice 1

Étudier l'ensemble de définition, la continuité puis la dérivabilité des fonctions suivantes. Calculer la dérivée, quand elle existe.

a) $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^3}$

b) $f : x \mapsto x\sqrt{2-x}$

c) $f : x \mapsto x \ln x - x$

d) $f : x \mapsto x^{3x}$

e) $f : x \mapsto \ln(3x^2+2x)$

f) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x^3-x}$

g) $f : x \mapsto \dfrac{x^2-3x+2}{3x+5}$

h) $f : x \mapsto (1-2x)\mathrm{e}^{-2x}$

i) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)+1}$

j) $f : x \mapsto x^x$

k) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x+1)}$

l) $f : x \mapsto x\lfloor x \rfloor$

m) $f : x \mapsto x^{x^x}$

n) $f : x \mapsto x^2 - 2|x|$

o) $f : x \mapsto 3^{4x^2-1}$

p) $f : x \mapsto \dfrac{x^3+2x^2-x+3}{2x^3-3x^2+x}$

q) $f : x \mapsto \sqrt{x}\ln(x)\mathrm{e}^x$

r) $f : x \mapsto \dfrac{2x\sqrt{x}}{x+1}$

s) $f : x \mapsto \sqrt{3x+5-x^2}$

t) $f : x \mapsto x^{\ln x}$

u) $f : x \mapsto \ln(1+|x|)$

v) $f : x \mapsto \sqrt{x^2-x^3}$

w) $f : x \mapsto x\,|x|$

x) $f : x \mapsto \dfrac{x}{|x|+1}$

y) $f : x \mapsto \sqrt{x}^x$

Exercice 2

Étude complète des fonctions suivantes (ensemble de définition, limites, éventuels prolongements par continuité, variations, allure de la courbe) :

a) $f : x \mapsto \sqrt{x+1}\,\ln(x+1)$

b) $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2-1}$

c) $f : x \mapsto \ln(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1)$

d) $f : x \mapsto \dfrac{x^2-3x+1}{2x^2-5x-3}$

e) $f : x \mapsto x^{1/x}$

f) $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2-1}$

Exercice 3

Calculer l'équation des tangentes en 0, 1, -2 et $\sqrt{3}$ (quand elles existent) des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto x^2 - 3x + 1$

b) $f : x \mapsto \sqrt{2x-1}$

c) $f : x \mapsto x\ln(x+3)$

d) $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{e}^x$

Utilisations locales de la dérivabilité

Exercice 4

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. La dérivée d'une fonction paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire).

2. Si f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction $\max(f,g)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. Si f est définie sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et bornée sur $[-1,1]$, alors il existe $x_0 \in]-1,1[$ tel que $f'(x_0) = 0$.

4. Toute fonction croissante sur $\mathbb{R}$ est dérivable à droite en tout point.

5. Toute fonction croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$ a une fonction dérivée positive ou nulle en tout point.

6. Toute fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ a une dérivée strictement positive en x_0.

7. Si f est dérivable sur $[0,1]$, alors $\lim\limits_{t\to 0} f'(t) = f'(0)$.

8. Si f est définie sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1]$ et si $\lim\limits_{t\to 0} f'(t)$ existe dans $\mathbb{R}$, alors f est dérivable en 0 et $\lim\limits_{t\to 0} f'(t) = f'(0)$.

9. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

10. Soit f une fonction 1-périodique telle que $f_{|[0,1]}$ est dérivable. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

11. Soit f une fonction 1-périodique telle que $f_{|[0,2]}$ est dérivable. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5
Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction f suivante :

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos\left(\sqrt{x}\right) \end{array}$$

1. en revenant à la définition de la dérivabilité en un point,

2. en utilisant le théorème de la limite de la dérivée.

Exercice 6
On considère la fonction f suivante :

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x - x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?

2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Préciser f' sur son ensemble de définition.

3. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$? de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 7
Montrer que la dérivée d'une fonction paire (resp. périodique) est une fonction impaire (resp. périodique).

Exercice 8
On pose : $f = \arcsin^2$.

1. Déterminer une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des fonctions polynomiales et admettant f' comme solution.

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0)$.

3. Donner alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de $f^{(n)}(0)$.

Exercice 9
On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) \; = \; f(x) + f(y) + xy$$

1. Démontrer que, pour tout $f \in \mathcal{E}$ dérivable en 0, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer $\mathcal{E} \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Étude de $(f^{-1})'$

Exercice 10
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle à préciser.

c) Dresser le tableau de variations de f^{-1}.

d) Quel est l'unique antécédent de 0 par f ? En déduire $(f^{-1})'(0)$.

e) Donner une expression générale de $(f^{-1})'$.

Exercice 11
On note $f : x \mapsto x\, e^x$.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ? Étudier ses variations.

b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans I, où I est un intervalle à préciser.

c) On note h la bijection réciproque. Déterminer sa dérivée h'.

d) Faire une étude complète de h (variations, allure de la courbe).

e) Justifier que l'équation $e^{-x} = 2x$ admet une unique solution réelle, et exprimer cette solution à l'aide de h.

Développement limité à l'ordre 1 en x_0

Exercice 12

Soit f une fonction dérivable en a.

Le but de l'exercice est de déterminer : $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(f(a+3h))^2 - (f(a-h))^2}{h}$.

a) On considère la fonction $h : x \mapsto f(a+x)$.
Montrer que la fonction h est dérivable en 0.

b) Écrire le dévelppement limité à l'ordre 1 de la fonction h en 0.
(on utilisera l'écriture avec la fonction $\varepsilon(.)$)

c) En déduire une écriture de $(f(a+x))^2$ pour x au voisinage de 0.

d) Démontrer que : $(f(a+x))^2 = (f(a))^2 + 2\,x f(a) f'(a) + \underset{x\to 0}{o}(x)$.
Conclure.

Caractère $\mathcal{C}^n/\mathcal{C}^\infty$

Exercice 13

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1+x & \text{si } x \geqslant 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f n'est pas deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition, les éventuels prolongements par continuité, et déterminer la classe la plus fine possible de la fonction (éventuellement prolongée). Donner l'équation des tangentes (si elles existent) aux points qui posent problème.

a) $f : x \mapsto e^{x+\frac{1}{x}}$

b) $f : x \mapsto x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

c) $f : x \mapsto (1-x)\sqrt{1-x^2}$

d) $f : x \mapsto \sqrt{x}\, e^{-x}$

e) $f : x \mapsto x\sqrt{x+x^2}$

f) $f : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x}}{e^x - 1}$

Calcul de dérivée $n^{\text{ème}}$

Exercice 15

Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de :

a) $f : x \mapsto (x^2+1)\, e^x$

b) $f : x \mapsto x^2\,(1+x)^n$

c) $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$

d) $f : x \mapsto \Big(\sin(x) + x\,\big(\cos(x)\big)^2\Big)\,x$

Exercice 16

a) Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\dfrac{1}{1-x^2} = a\,\dfrac{1}{1-x} + b\,\dfrac{1}{1+x}$.

b) En déduire la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$.

Exercice 17

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les dérivées $n^{\text{ème}}$ des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto x^2 \sin(x)$

b) $x \mapsto x^2\,(1+x)^n$

c) $x \mapsto e^x \sin(x)$

Théorème de Rolle

Exercice 18

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$.

Montrer qu'il existe un élément $c \in \,]a,b[$ tel que $f(c) = f''(c)$.
(on pourra introduire la fonction $g : x \mapsto e^x\,(f(x) - f'(x))$)

Théorème des accroissements finis

Exercice 19

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer :

$$\forall x > 0,\ \exists c > 0, \quad f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c))$$

(on pourra introduire la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - f(-x)$)

Exercice 20

Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}_+$, continue, dont la restriction à $\mathbb{R}_+^*$ est dérivable et admettant $f(0)$ comme limite en $+\infty$. L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $f'(a) = 0$ sous différentes hypothèses (généralisation du théorème de Rolle).

1. Dans cette question, on suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

a) Montrer que si f' ne s'annule pas, alors f est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+$.

b) En déduire que la limite de f en $+\infty$ ne peut être égale à $f(0)$.

c) Conclure quant à l'objectif de l'exercice.

2. Dans cette question, on suppose seulement que la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$ est dérivable. On suppose que f n'est pas constante (dans le cas contraire, le résultat cherché est élémentaire).

a) Justifier l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $f(\alpha) \neq f(0)$. Dans la suite de cette question, on supposera : $f(\alpha) > f(0)$.

b) Justifier l'existence de $\beta \in]\alpha + 1, +\infty[$ tel que : $2\,f(\beta) < f(\alpha) + f(0)$, puis l'existence de $(u, v) \in]0, \beta[$ tel que :

$$\begin{cases} u < \alpha < v \\ f(u) = f(v) \end{cases}$$

On pourra s'aider d'un dessin

c) Montrer l'existence de $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $f'(a) = 0$.

3. Dans cette question, on retrouve le résultat de la question précédente par une autre méthode. On considère la fonction :

$$g : [0, \tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f\big(\tan(x)\big) & \text{si } x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ f(0) & \text{si } x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

a) Vérifier que g est une fonction continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, dont la restriction à $]0, \frac{\pi}{2}[$ est dérivable et comparer les réels $g(0)$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Conclure quant à l'objectif de cet exercice.

Exercice 21

Soit f une fonction réelle dérivable sur $[0, 1]$ et telle que : $f(1) - f(0) = \dfrac{1}{2}$.
Montrer que f' n'admet aucun point fixe.

Exercice 22

Soit f une fonction réelle dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que : $2\,f(1) = f(2)$.
Montrer que le graphe Γ de f admet une tangente passant par l'origine du repère dans lequel on trace Γ.

Exercice 23

Majorer, lorsque (a, b) est un couple de réels et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, le nombre de solutions réelles de l'équation $x^n + ax + b = 0$.

Exercice 24

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer qu'une fonction polynomiale de degré n s'annule au plus n fois.

Exercice 25
On considère la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{array}$$

1. Démontrer : $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f est le produit de f^{2n+1} et d'une fonction polynomiale que l'on note P_n.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de P_n est n et son coefficient dominant est $(-1)^n\, n!$.

3. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1+x^2)\, f'(x) + x\, f(x)$.

4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$P_{n+1}(x) + (2n+1)\, x\, P_n(x) + n^2\, (1+x^2)\, P_{n-1}(x) \;=\; 0$$

5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $P_n(0)$.

6. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n' = -n^2\, P_{n-1}$.

7. Calculer P_1, P_2, P_3 et P_4.

8. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n admet n racines réelles deux à deux distinctes.
on pourra utiliser le résultat de l'exercice 20

Applications de l'IAF

Exercice 26

On considère la fonction f suivante.

$$f \;:\; \left|\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \end{array}\right.$$

a) Calculer, pour tout $x \in \,]0,+\infty[$, $f'(x)$.

b) Montrer que $\forall x \in \,]0,+\infty[\,,\, f''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^3}(x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + x + 2)$.

c) Étudier les variations de la fonction $g : [0,+\infty[\, \to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $[0,+\infty[$, par : $g(x) = x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + x + 2$.
En déduire : $\forall x \in \,]0;+\infty[\,,\, f''(x) > 0$.

d) En déduire le sens de variation de f (on admettra que $f'(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2}$).
On précisera la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f.

e) On considère la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Montrer $\forall x \in \,]0,+\infty[\,,\, \left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

f) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in \,]0,+\infty[$.

g) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ln 2| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|u_n - \ln 2|$.

h) Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 27

Soit la suite la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$

On pose $f(x) = \sqrt{x+1}$.

a. Montrer que $[0,2]$ est stable par f et que : $\forall x \in [0,2], |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

b. Déterminer les points fixes de f. Notons r l'unique point fixe dans $[0,2]$.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{|u_n - r|}{2}$ puis que $|u_n - r| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$

e. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

f. Déterminer un entier N tel que $|u_N - r| \leqslant 10^{-9}$.

g. Écrire un programme **Python** donnant une valeur approchée de r à 10^{-9} près.

Exercice 28

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0,1]$, que l'on notera α.

2. Montrer que l'intervalle $[0,1]$ est stable par f.
En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$.

3. ***a)*** Montrer que : $\forall x \in [0,1],\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} |u_n - \alpha|$.

c) Puis que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^n$.

d) En déduire enfin que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 29

On considère la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4 + \frac{\ln u_n}{4} \end{cases}$

a) Soit $f : x \mapsto 4 + \dfrac{\ln x}{4}$.
Étudier la fonction f et montrer que $\left[1, \mathrm{e}^2\right]$ est stable par f.

b) Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $\left[1, \mathrm{e}^2\right]$. En déduire que f possède un unique point fixe dans cet intervalle.

c) Montrer que pour tout n, u_n existe et appartient à l'intervalle $\left[1, \mathrm{e}^2\right]$.

d) Étudier la monotonie de (u_n) et montrer qu'elle converge vers une limite L à préciser.

e) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, donner une majoration de $|u_n - L|$ en fonction de n.

Exercice 30

Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccl} f_n & : & \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \end{array}$$

1. Démontrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in [0,1]$: $\left|f_n'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{n!}$

2. En déduire que la suite réelle $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 31

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} p^\alpha$.

1. Démontrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $(\alpha+1)\, p^\alpha \leqslant (p+1)^{\alpha+1} - p^{\alpha+1} \leqslant (\alpha+1)\,(p+1)^\alpha$.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n^{\alpha+1} \leqslant (\alpha+1)\, S_n \leqslant (n+1)^{\alpha+1}$.

3. Déterminer un équivalent « simple » de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis la limite, si elle existe de la suite $(n^\beta\, S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour chaque valeur du réel β.

Exercice 32
On considère la fonction f définie par :

$$f \ : \ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} \times \dfrac{\ln(x)}{2} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array}$$

1. Démontrer que la fonction f est continue sur son ensemble de définition.

2. Démontrer : $\forall x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.

3. Construire le tableau de variations de f et démontrer : $\forall x > 1$, $f(x) < x$.

4. Soit $a > 1$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

a) Démontrer que la suite (x_n) est bien définie et à valeurs dans $]1, +\infty[$.

b) Établir que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite ℓ.

c) Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad |x_{n+1} - \ell| \ \leqslant \ \frac{1}{3} \, |x_n - \ell|$$

d) En déduire :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad |x_n - \ell| \ \leqslant \ \frac{1}{3^{n-n_0}} \, |x_{n_0} - \ell|$$

e) En déduire : $x_n = \ell + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

Exercice 33

Étudier la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[\\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2} \end{cases}$

Exercice 34

Étudier la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \dfrac{3}{2u_n^2 + 1} \end{cases}$

Fonctions lipschitziennes

Exercice 35
Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont lipschitziennes ? On déterminera alors, s'il existe, leur plus petit rapport de Lipschitz.

1. $f \ : \ \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$

2. $f \ : \ \begin{array}{rcl} [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$

3. $f \ : \ \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

4. $f \ : \ \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

Exercice 36
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$. Soient f et g deux fonctions définies et lipschitziennes sur $[a,b]$.

1. Démontrer que $f + g$ et $f \times g$ sont lipschitziennes.

2. Démontrer que, si f ne s'annule pas sur $[a,b]$, la fonction $\dfrac{1}{f}$ est lipschitzienne.

3. Les résultats précédents restent-ils nécessairement vrais si f et g ne sont pas définies sur un segment ?

Exercice 37
Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$.

a) Démontrer que si la restriction à $[a,b]$ de f est lipschitzienne, alors elle est bornée.

b) Ce résultat est-il encore nécessairement vrai pour la restriction de f à un intervalle non borné sur lequel cette dernière est supposée lipschitzienne ?

2. On suppose f lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Démontrer que, pour tout $p \in]-\infty, -1[$, la fonction $g : x \mapsto x^p\, f(x)$ admet 0 comme limite en $+\infty$.

3. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant : $a < b < c$. On suppose que les restrictions de f sur $[a,b]$ et $[b,c]$ sont lipschitziennes. Montrer que la restriction de f sur $[a,c]$ est lipschitzienne.

Exercice 38
Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. On suppose f lipschitzienne sur I. A-t-on nécessairement f dérivable sur I ?

2. On suppose f lipschitzienne et dérivable sur I. A-t-on nécessairement f' bornée sur I ?

3. On suppose f dérivable sur I.

a) A-t-on nécessairement f lipschitzienne sur I ?

b) Reprendre la question si on suppose f dérivable sur I et f' bornée sur I.

c) Reprendre la question si on suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

d) Reprendre la question si on suppose f dérivable sur I et I est un segment.

e) Reprendre la question si on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et I est un segment.

Exercice 39
Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Soit g une fonction réelle définie sur I vérifiant : $g(I) \subset I$. On suppose qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que g soit k-lipschitzienne sur I. On définit par récurrence une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

1. Justifier que la suite (u_n) est bien définie.

2. Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$: $|u_{n+1} - u_n| \leqslant k\,|u_n - u_{n-1}|$.

3. En déduire que, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $q > p \geqslant 0$:

$$(1-k)\,|u_q - u_p| \ \leqslant\ k^p\,|u_1 - u_0|$$

4. Montrer que la suite (u_n) est bornée.

5. On admet l'existence d'une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel noté L.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n$.

b) En appliquant la question *2.*, montrer que la suite $(u_n - u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, puis que (u_n) converge vers L.

c) Vérifier : $g(L) = L$. Puis démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - L| \ \leqslant\ \frac{k^n\,|u_1 - u_0|}{1-k}$$

Démontrer des inégalités à l'aide de tableaux de variations

Exercice 40

1) Montrer que : $\forall x \in]-1, +\infty[,\quad \dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(x+1) \leqslant x$

2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\quad \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$

Convexité

Exercice 41
Démontrer les inégalités suivantes.

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant x+1$

b) $\forall x \in]0,+\infty[,\ \ln x \leqslant x-1$

c) $\forall x \in [1,\mathrm{e}],\ \ln x \geqslant \dfrac{x-1}{\mathrm{e}-1}$

Exercice 42
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que : $\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b}{2}$.

Exercice 43
Étudier les fonctions suivantes, notamment la convexité et la présence de points d'inflexion. On finira en traçant les courbes.

a) $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$

b) $f : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$

c) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}} + 2x - 3$

d) $f : x \mapsto \dfrac{2\ln x + 3}{x}$

e) $f : x \mapsto -x^2 + 3x - \ln x$

Exercice 44
a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto -\ln(\ln x)$ est convexe sur $]1,+\infty[$.

b) En déduire que : $\forall (x,y) \in]1,+\infty[^2,\ \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln x \, \ln y}$.

Exercice 45
Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(0)=0$ et, pour $x>0$, $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$.

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0,1[$ (0 compris).

b) Déterminer la convexité de f sur $[0,1[$.

c) Montrer que f possède un unique point d'inflexion sur cet intervalle et déterminer la tangente de f en ce point.

d) Tracer une allure de la courbe représentative de f.

Exercice 46
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(a)=f(b)=0$.
On note $M = \sup\limits_{[a,b]} |f''|$ et on considère :

$$g : x \mapsto f(x) - M\,\frac{(x-a)(b-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad h : x \mapsto f(x) + M\,\frac{(x-a)(b-x)}{2}$$

a) Justifier l'existence de M.

b) Montrer que g est convexe et h est concave.

c) En déduire que, pour tout $x \in [a,b]$, on a : $|f(x)| \leqslant M\,\dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$.

Exercice 47
Démontrer : $\forall x \in [1,\mathrm{e}],\ \dfrac{x-1}{\mathrm{e}-1} \leqslant \ln(x) \leqslant \min\left(x-1, \dfrac{x}{\mathrm{e}}\right)$.

Exercice 48
Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - 2\,\dfrac{\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right)} \geqslant 0$.

Exercice 49
1. Démontrer que la fonction ln est concave.

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(a_1,\dots,a_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$:

$$\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^n a_i} \leqslant \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i$$

Exercice 50
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a<b$. Soient f et g deux fonctions convexes sur $]a,b[$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

1. Démontrer que $f+g$, $\lambda \cdot f$ et $\sup(f,g)$ sont convexes sur $]a,b[$.

2. On suppose que la fonction f est bijective et décroissante sur $]a,b[$.

  a) Démontrer que f^{-1} est convexe sur $\left]f(b), f(a)\right[$.

  b) Que dire si f est bijective et croissante ?

Exercice 51
Démontrer qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, convexe et majorée, est constante.

Calculs de développements limités

Exercice 52
Déterminer les développements limités à l'ordre 4 en 0 des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x+1}}$
2. $x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{1+x^2}}$
3. $x \mapsto \arccos(x)$
4. $x \mapsto \ln\left(1+x+\sqrt{1+x^2}\right)$

Exercice 53
Déterminer les développements limités à l'ordre 3 des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)$ en 0
2. $x \mapsto \left(1+\sin(x)\right)^{\frac{1}{x}}$ en 0
3. $x \mapsto \arctan\left(\sqrt{3}\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)\right)$ en 0
4. $x \mapsto \arctan\left(2\sin(x)\right)$ en $\dfrac{\pi}{3}$

Exercice 54
Déterminer le développement limité de la fonction arcsin en 0 à tout ordre.

Exercice 55
On considère la fonction f définie par :

$$f \ : \ x \ \mapsto \ \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ dont la bijection réciproque est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. On admet que f est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner un développement limité de la fonction f^{-1} à l'ordre 3 en 1.

Description locale du graphe d'une fonction

Exercice 56
On considère la fonction f définie par :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc}]0, \frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(\tan(x)\right) \end{array}$$

Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{4}$ et préciser la position relative locale de cette courbe et de cette tangente.

Exercice 57
On considère la fonction f suivante :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{1+\sin(x)}} - \mathrm{e}}{\tan(x)} \end{array}$$

1. Démontrer que f se prolonge par continuité en 0 en une fonction que l'on nommera g.
2. Démontrer que g est dérivable en 0 puis préciser la position relative du graphe de g et de sa tangente au voisinage de 0.

Exercice 58
On considère la fonction f définie par :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)\arctan(x)\sqrt{x^2+x+1} \end{array}$$

Préciser, si elles existent, les asymptotes du graphe de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, ainsi que les positions relatives de ces asymptotes et du graphe de f au voisinage de ces mêmes points.

Exercice 59
On considère la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^4 \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2+1} \end{array}$$

1. Démontrer qu'au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), le graphe de f est asymptote à une parabole dont on donnera l'équation.

2. Préciser la position respective de cette parabole et du graphe de f au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Exercice 60
On considère la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\ln(1+x)}{x} \end{array}$$

Démontrer que la fonction f se prolonge en une fonction g trois fois dérivable sur $]-1,+\infty[$. On précisera les valeurs de $g(0)$, $g'(0)$, $g''(0)$ et $g^{(3)}(0)$.

Exercice 61
On considère la fonction définie sur $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$ par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}\ \sin(x)\ \ln(1+x)$.

1. Calculer le développement limité de f à l'ordre 2 en 0.

2. Démontrer que f peut être prolongée par continuité en 0 en une fonction g à préciser dont on prouvera qu'elle est dérivable en 0.

3. Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

4. On pose $h : x \mapsto x\, f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Que peut-on en déduire à propos de h à partit du développement limité d'ordre 2 en 0 de f ?

5. En déduire l'équation d'une asymptote au graphe de h et préciser la position relative du graphe par rapport à l'asymptote.

Développement asymptotique des solutions d'une équation

Exercice 62
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n suivante :

$$f_n : \begin{array}{ccc}]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x\ \tan(x) \end{array}$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est bijective.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan(x) = e^{-x}$ admet une unique solution $\alpha_n \in\ ]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

3. Démontrer que la réciproque de f_0 admet un développement limité à tout ordre en 0. Calculer ce développement limité à l'ordre 3.

4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\alpha_n = n\pi + f_0^{-1}\left(e^{-n\pi}\right)$.

5. En déduire : $\alpha_n = n\pi + e^{-n\pi} - e^{-2n\pi} + \dfrac{7}{6}\ e^{-3n\pi} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(e^{-3n\pi}\right)$.

Exercice 63
On considère la fonction f suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x + x \end{array}$$

1. Démontrer : $\dfrac{x}{x + \ln(1 + x\, e^{-x})} = 1 - e^{-x} + \underset{x\to+\infty}{o}(e^{-x})$.

2. En déduire : $\dfrac{x}{\ln\left(f(x)\right)} = 1 - \dfrac{1}{f(x)} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel x_n tel que : $f(x_n) = n$.

4. Démontrer : $x_n = \ln(n) - \dfrac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$.