Racines carrées, racines $n^{\text{ème}}$

Exercice 1
Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants.

a) $1+2i$
b) $-3-3i$
c) $5-4i$
d) $\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$
e) $2+3i$
f) $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$

Exercice 2
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer les racines $n^{\text{ème}}$ des nombres complexes suivants.

a) $1+i$
b) $3i$
c) $1-j+j^2$
d) $\dfrac{1+z}{1-z}$ avec $z\in\mathbb{U}\setminus\{1\}$

Exercice 3
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2=-1+i\sqrt{3}$
b) $z^2=7-7\,i$
c) $z^5=1$

On cherchera les solutions sous forme trigonométrique.

Exercice 4
Soit $\theta\in\,]0,2\pi[$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^5=\mathrm{e}^{i\theta}$.

Exercice 5
1. Écrire les nombres complexes $-i$ et $\dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$ sous forme trigonométrique.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.
  a) $z^5=-i$
  b) $z^6=\dfrac{-4}{1+i\sqrt{2}}$

Résolution d'équations

Exercice 6
Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

1. $z^2+2iz-1=0$
2. $iz^2+(1+i)z=2$
3. $z^5-4=0$
4. $z^4+2i=0$
5. $z^2+2\cos\left(\dfrac{\pi}{11}\right)z+1=0$
6. $z^6-z^3+1=0$
7. $z^6-3z=0$
8. $z^8=\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}-i}\right)^3$
9. $iz^2-3z+2=0$
10. $z^4-30z^2+289=0$

Exercice 7
On considère le polynôme P défini par :

$$P(X)\ =\ X^3-6X^2+13X-10$$

1. Calculer $P(2)$ et en déduire une factorisation de P.
2. Déterminer les racines complexes de P.

Exercice 8
Donner la forme algébriques des solutions complexes des équations suivantes :

(1) $z^2+2(i-1)z+8-2i=0$
(2) $z^4-3iz^2+i-3=0$
(3) $z^3+2z^2+2z+1=0$
(4) $z^2+3(i-1)z+2-3i=0$

Exercice 9
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^4-(5-14i)\,z^2-2\,(5i+12)=0$.

Exercice 10
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2+z+1=0$ | ***b)*** $z^2-2z+5=0$

Exercice 11
Soit $(n,\alpha)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}$. Donner la forme trigonométrique des solutions complexes des équations suivantes :

(1) $z^4-2\sin(\alpha)z^2+\big(\tan(\alpha)\big)^2=0$
(2) $z^2-2i\sin(\alpha)z+2\big(1+\cos(\alpha)\big)=0$
(3) $(z+1)^n=z^n$
(4) $z^6+(1-2i)z^3=i+1$
(5) $z^{2n}+2\cos(\alpha)z^n+1=0$
(6) $(z^2+1)^n=1$

Exercice 12
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z+1)^n=(z-1)^n$.
Combien de solutions compte cette équation ?

Exercice 13
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère l'équation :

$$(E) \qquad (z^3+1)^{n-1}+(z^3+1)^{n-2}+\cdots+(z^3+1)^2+(z^3+1)+1 \;=\; 0$$

d'inconnue complexe z. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation (E). Dans tout cet exercice, on ne cherchera pas spécialement à mettre les résultats sous forme algébrique ou trigonométrique.

1. Pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_k$ des racines cubiques de $e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1$.

2. Montrer que, pour tout $z\in\mathbb{C}^*$, le complexe z est solution de (E) si et seulement si $(z^3+1)^n-1=0$.

3. Résoudre l'équation (E).

Exercice 14
Déterminer l'ensemble des solutions du système d'équation d'inconnue complexe z :

$$\left\{\begin{array}{rcl} |z| & = & 1 \\ iz & = & \bar{z} \end{array}\right.$$

Exercice 15
Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation d'inconnue complexe z :

$$4z^2+8|z|^2-3 \;=\; 0$$

Indication : on pourra remarquer que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $8|z|^2-3$ est un réel.

Exercice 16
Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation d'inconnue complexe z :

$$z^5+\bar{z}^5+z^7 \;=\; 0$$

Exercice 17

1. Montrer que les équations suivantes ont les mêmes solutions dans $\mathbb{C}$.
(i) $1+z+z^2+z^3+z^4=0$
(ii) $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2+\left(z+\dfrac{1}{z}\right)-1=0$

2. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et de $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$

3. Proposer une construction utilisant uniquement une règle non graduée et un compas permettant de placer le point d'affixe $e^{i\frac{\pi}{5}}$ sur le cercle trigonométrique, en partant de la donnée du cercle trigonométrique et des axes principaux ($\mathbb{R}$ et $i\,\mathbb{R}$).
Remarque : ce procédé permet le tracé du pentagone régulier à la règle et au compas.

Exercice 18
Déterminer l'ensemble des complexes z tels que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} |z| & = & |z+2| \\ \arg(z) & = & \arg(z+3+i)\ [2\pi] \end{array}\right.$$

Indication : on pourra mener une analyse géométrique du problème.

Équations exponentielles

Exercice 19
Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $e^z = \sqrt{3} - 3i$

2. $e^z = (1+i)^3$

3. $e^{4z} - \sqrt{2}\, e^{2z} + 1 = 0$

Liens entre coefficients et racines d'un polynôme de degré 2

Une expression de deux variables complexes a et b, algébrique (c'est-à-dire ne mettant en jeu que les opérations $+$, $-$, $\times$ et $/$), symétrique (c'est-à-dire dans laquelle on peut échanger a et b sans en modifier la forme) peut être écrite de manière algébrique en fonction uniquement de $a+b$ et ab. On peut chercher cette écriture dans chaque cas particulier.

Exercice 20
On pose : $u = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $S = u + u^2 + u^4$ et $T = u^3 + u^5 + u^7$.

1. Calculer $S + T$ et ST.

2. En déduire les valeurs de ces complexes.

Exercice 21
Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes suivants :

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{l} z_1 + z_2 = -i \\ z_1\, z_2 = 5 - 5i \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad (S_2) : \left\{\begin{array}{l} z_1 + z_2 = i \\ z_1\, z_2 = 1 - 3i \end{array}\right.$$

Exercice 22
Soit $a \in \mathbb{C}$. On considère la fonction polynomiale :

$$\begin{array}{rcccl} P & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & 2z^2 + z + a \end{array}$$

On note α et β les deux racines de P, que l'on ne cherchera pas à calculer explicitement.
Donner l'expression explicite d'une fonction polynomiale de degré 2 dont les deux racines sont α^2, β^2, α et β n'apparaissant pas dans le résultat.

Exercice 23

Soit $a \in \mathbb{C}$. On considère les deux fonctions polynomiales :

$$P : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2 + az + 1 \end{array} \qquad Q : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^3 + az^2 - 2 \end{array}$$

On note α et β les deux racines de P, que l'on ne cherchera pas à calculer explicitement.

1. On pose $s = \alpha + \beta$ et $p = \alpha\beta$. Développer l'expression $Q(\alpha)\,Q(\beta)$ et exprimer ce complexe uniquement en fonction des complexes s, p et a (on ne cherchera pas à simplifier l'expression finale).

2. Montrer que P et Q ont une racine commune si et seulement si $2a^4 + 4a^3 - 2a^2 - 6a + 5 = 0$.

Exercice 24

On considère le système de deux équations à deux inconnues complexes x et y défini par :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} x^2 & + & y^2 & = & 2 \\ x^3 & + & y^3 & = & 0 \end{array} \right.$$

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. On pose $s = x + y$ et $p = xy$. Montrer que (x, y) est solution de (S) si et seulement si :

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} s^2 & - & 2p & = & 2 \\ s^3 & - & 3sp & = & 0 \end{array} \right.$$

2. Résoudre le système (E).
En déduire que (x, y) est solution de (S) si et seulement si x et y sont les deux racines d'une des trois fonctions polynomiales suivantes :

$$z \mapsto z^2 - 1 \qquad \text{ou} \qquad z \mapsto z^2 - \sqrt{6}\,z + 2 \qquad \text{ou} \qquad z \mapsto z^2 + \sqrt{6}\,z + 2$$

3. Résoudre le système (S).

Exercice 25

Soit $(a, b) \in (\mathbb{C}^*)^2$. On désigne par (E) l'équation $z^2 + az + b = 0$ d'inconnue complexe z.

1. On suppose que les racines de (E) sont de module 1. Démontrer :

$$|b| = 1 \qquad \text{et} \qquad |a| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \arg(b) = 2\arg(a)\ [2\pi]$$

2. Établir la réciproque du résultat établi dans la question précédente.

Exercice 26

On considère la fonction polynomiale :

$$P : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2 + 3z - 1 \end{array}$$

On note a et b les racines de P, éventuellement confondues, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = a^n + b^n$.

1. Exprimer $a^2 + b^2$ en fonction de $(a + b)^2$ et de ab. En déduire la valeur de S_2.

2. En travaillant de manière analogue à la question précédente, calculer S_3.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer :

$$(a + b)^{2n} = \binom{2n}{n}(ab)^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k}(ab)^k \left(a^{2n-2k} + b^{2n-2k}\right)$$

En déduire :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k}(-1)^k\, S_{2n-2k} = 9^n - (-1)^n \binom{2n}{n}$$

Calculer alors S_4 et S_6.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer :

$$(a + b)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}(ab)^k \left(a^{2n+1-2k} + b^{2n+1-2k}\right)$$

En déduire :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}(-1)^k\, S_{2n+1-2k} = -3 \times 9^n$$

Calculer alors S_5 et S_7.