

Structure algébrique de $\mathbb{K}[X]$ **Exercice 1**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n .

1. Montrer que P' divise P si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$(X - \lambda)P'(X) = nP(X)$$

2. En déduire les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ divisibles par leur polynôme dérivé.

On pourra décomposer le polynôme P introduit en question 1. sur la famille $(1, X - \lambda, \dots, (X - \lambda)^n)$.

Exercice 2

Donner les coefficients dominants, constants et le degré des polynômes suivants ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$$\begin{array}{l|l} a) (X - 1)^n - (X + 1)^n, & c) (1 - X^3)^5 + (X^5 - 1)^3, \\ b) (1 - X^4)^5 + (X^4 - 1)^4, & d) (X^2 + 1)^{3n+1} - (X^2 - 1)^{3n+1} \end{array}$$

Exercice 3

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Déterminer le degré du polynôme $P(X + 1) - P(X)$ en fonction du degré de P .

Exercice 4

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, P(n) = P(n + 1)$. Montrer que $\deg(P) \leq 0$.

Fonctions polynomiales, racines**Exercice 5**

On considère le polynôme P défini par $P(X) = 3X^2 - X - 2$.

a. Montrer que 1 est une racine de P , et trouver un polynôme Q tel que :

$$P(X) = (X - 1)Q(X).$$

b. Étudier le signe de P sur \mathbb{R} .

Exercice 6

Démontrer par l'absurde qu'un polynôme de degré 2 ne peut avoir 3 racines distinctes ou plus.

Exercice 7

1. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x$.

2. En déduire qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \bar{z}$.

Exercice 8

Pour $T \in \mathbb{C}^*$, déterminer les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ dont la fonction polynomiale associée est T -périodique.

Exercice 9

Soit P une fonction polynomiale paire. Montrer que P n'a que des puissances paires.

Exercice 10

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $E_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ n'a que des racines simples.

On pourra raisonner par récurrence en remarquant que $E'_{n+1} = E_n$.

Exercice 11

Soit $n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$. Montrer que le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ admet n racines simples.

Exercice 12

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X - 1)P(X + 1)$. On pourra en particulier s'intéresser à une racine de module maximal d'un polynôme P non nul satisfaisant l'équation.

Exercice 13

Soit $p \in \mathbb{N}$, et $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $2p+1$. On suppose que, pour tout $k \in \llbracket 0, 2p+1 \rrbracket$, $P^{(k)}(0) < 0$.

1. Montrer que P admet au moins une racine réelle.
2. Montrer que toutes les racines réelles de P sont strictement négatives.

Exercice 14

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. On pose :

$$P(X) = ((X - a)^n (X - b)^n)^{(p)}$$

Un des objectifs de l'exercice est de calculer la valeur prise par la fonction polynomiale \tilde{P} associée à P au point a .

1. On suppose : $p > 2n$. Que vaut P ? Conclure quant à l'objectif de cet exercice.
2. On suppose : $p < n$. Justifier le fait que a est racine de P . En déduire la valeur de $\tilde{P}(a)$.
3. On suppose : $n \leq p \leq 2n$.
 - a) Pour tout $(\lambda, m, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^2$ vérifiant $k \leq m$, donner une expression explicite du polynôme dérivé d'ordre k de $(X - \lambda)^m$.
 - b) En utilisant alors la formule de Leibniz, démontrer :

$$\tilde{P}(a) = \frac{p! n!}{(p-n)! (2n-p)!} (a-b)^{2n-p}$$

Exercice 15

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P \circ P = P$.

Exercice 16

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P'^2 = 4P$.

Exercice 17

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que les racines de $X^n + X + 1$ dans \mathbb{C} sont simples.

Exercice 18

On considère l'application :

$$\begin{aligned} \Delta : \mathbb{R}[X] &\rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto P(X+1) - P(X) \end{aligned}$$

1. Montrer pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\Delta^q(P) = \sum_{k=0}^q (-1)^{q-k} \binom{q}{k} P(X+k)$$

en notant Δ^q la composée de Δ avec elle-même q fois.

2. a) Montrer que pour tout polynôme réel P non nul : $\deg(\Delta(P)) \leq \deg(P) - 1$.
b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n-1$, la valeur de $\Delta^n(P)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n-1$. Supposons qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\tilde{P}(k) = r^k$. Calculer la valeur de $\tilde{P}(n+1)$.

Exercice 19

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{C}$ pour que le polynôme complexe $3X^5 + 10aX^3 + 15X - 8i$ admette une racine d'ordre de multiplicité au moins 3.

Exercice 20

On note \mathcal{A} l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant : $P(X^2) = P \times P(X+1)$.

1. Soit P un polynôme non nul de \mathcal{A} .
 - a) Montrer que si $a \in \mathbb{C}$ est racine de P , alors il en est de même, pour tout $r \in \mathbb{N}$, de $a^{(2^r)}$.
 - b) En déduire que les racines non nulles de P sont de module 1.
2. Soit P un polynôme non nul de \mathcal{A} .
 - a) Montrer que si $a \in \mathbb{C}$ est racine de P , alors il en est de même de $(a-1)^2$.
 - b) Quelles sont les racines de P ?
3. Déterminer explicitement les éléments de \mathcal{A} .

Résolution d'équations**Exercice 21**

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

$$a. x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$b. 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$c. x = \sqrt{x} + 2$$

$$d. x^4 + 3x^2 - 10 = 0$$

$$e. (x^2 - 3x + 4)^2 = (x^2 + 2x - 5)^2$$

$$f. (2x - 3)^2 = (7x + 5)^2$$

Exercice 22

Déterminer trois réels a , b et c tels que, pour tout x différent de 0, 1 et -1 , on ait :

$$\frac{1}{x^3 - x} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x + 1}$$

Exercice 23

Déterminer les couples de réels (a, b) telles que :

$$a. a^3 - b^3 \geq ab^2 - a^2b$$

$$b. a^2 + b^2 + 2 \geq 2a + 2b$$

$$c. a^2 - 2ab - 3b^2 \geq 0$$

Exercice 24

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue x :

$$m^2x + 2m = 9x - 6$$

On pourra discuter selon la valeur du paramètre m .

Exercice 25

Pour quelles valeurs du paramètre réel m les trinômes $x^2 + 2x + m - 4$ et $x^2 + x - 7m + 1$ ont-ils une racine commune ?

Quelle est cette racine ?

Autour de la division euclidienne**Exercice 26**

À quelle condition sur $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 27

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ en fonction de valeurs prises par la fonction polynomiale associée à P et par les dérivées de cette dernière.

Exercice 28

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 + X + 1$.

Exercice 29

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $A_n = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ est divisible par $(X - 1)^2$.

Exercice 30

Démontrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(X) - X$ divise $(P \circ P)(X) - X$.

Exercice 31

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin(\theta)X^n - \sin(n\theta)X + \sin((n-1)\theta)$ est divisible par $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$.

Exercice 32

Soit $(n, \alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$. Démontrer que $X^2 - 2\cos(\alpha)X + 1$ divise dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\cos((n-1)\alpha)X^{n+1} - \cos(n\alpha)X^n - \cos(\alpha)X + 1$$

Exercice 33

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\cos(\theta) + \sin(\theta)X)^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 34

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Trouver un polynôme unitaire $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que $P(A) = 0$.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, à l'aide de la division euclidienne de X^n par P .

Exercice 35

On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soit $a \in \mathbb{K}$.

1. Calculer, en fonction de a , $P(a)$, $P'(a)$, le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $(X - a)^2$ divise P .
2. Soit $b \in \mathbb{K}$ distinct de a . Calculer, en fonction de a , b , $P(a)$, $P(b)$, le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $(X - a)(X - b)$ divise P .

Exercice 36

On note \mathcal{A} l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $(X - 1)^4$ divise $P + 1$ et $(X + 1)^4$ divise $P - 1$.

1. Soit P un polynôme de \mathcal{A} . Démontrer que $(X^2 - 1)^3$ divise P' .
2. Déterminer un élément de \mathcal{A} de degré 7.
3. Déterminer explicitement les éléments de \mathcal{A} .

Factorisation de polynômes**Exercice 37**

Factoriser le polynôme $P(X) = X^4 - 6X^2 + 7X - 6$, sachant qu'il admet deux racines évidentes.

Exercice 38

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^4 + 2$.

Exercice 39

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n} + X^n + 1$.

Exercice 40

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $6X^4 - 43X^3 + 107X^2 - 108X + 36$ sachant qu'il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^*)^2$ tel que ses racines soient α , β , $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}$.

Liens entre coefficients et racines d'un polynôme**Exercice 41**

Donner la somme et le produit des racines (complexes) de $X^5 - 3X^3 + 7X - 1$, puis de $-X^3 - 2X^4 + X + 1$.

Exercice 42

Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que l'une des racines de $X^2 - 7X + \lambda$ soit le double de l'autre.

Exercice 43

Factoriser $8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$ sachant que ses racines sont en progression arithmétique.

Exercice 44

Soient x, y, z les racines complexes du polynôme $X^3 + pX^2 + qX + r$, où $(p, q, r) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^*$.

1. Donner les relations entre les racines et les coefficients du polynôme.
2. Calculer $x^n + y^n + z^n$ pour $n \in \{1, 2, -1\}$.
3. Former le polynôme unitaire de degré 3 dont les racines sont x^2, y^2, z^2 (on exprimera ses coefficients en fonction de p, q , et r .)

Exercice 45

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer : $\sum_{p=0}^{n-1} X^{2p} = \prod_{p=1}^{n-1} \left(X^2 - 2 \cos\left(\frac{p\pi}{n}\right) X + 1 \right)$.
2. En déduire des expressions sans produit de $\prod_{p=1}^{n-1} \cos\left(\frac{p\pi}{n}\right)$ et $\prod_{p=1}^n \sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right)$.

Exercice 46

Soit $m \in \mathbb{C}$. On note P le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par :

$$P(X) = X^4 - 9X^3 + mX^2 - 8X + 6$$

Déterminer les complexes m pour que la somme de deux racines du polynôme P soit égale à la somme des deux autres.

Exercice 47

Résoudre dans $(\mathbb{C}^*)^3$ le système :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 9 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \end{cases}$$