Résolution de systèmes linéaires

Exercice 1

Résoudre les systèmes suivants.

a.

$$\begin{cases} x + y + z - 2t = -8 \\ x + y - 2z + t = 4 \\ x - 2y + z + t = -2 \\ 2x - y - z - t = -1 \end{cases}$$

b.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Exercice 2

On cherche un polynôme P de degré 3 qui vérifie $P(1) = P(-1) = P'(1) = 1$.

1) Un tel polynôme existe-t-il ? Est-il unique ?

2) Même question pour un polynôme P de degré 4 vérifiant $P(i) = i$, pour $i = 0, 1, 2, 3$ et 4.

Exercice 3

Résoudre les systèmes suivants.

a)

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 5x - 8y = -6 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 6x + 5y + z = 3 \\ 2x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} -x + 5y = 5 \\ 2x + 7y + z = -6 \\ -9x + y - 7z = 0 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -25 \\ x + 2y - 3z = 20 \\ 3x + y - 2z = 14 \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ -y + z = -1 \\ -x - z = -2 \end{cases}$$

f)

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 1 \\ -x - 3y + 8z - 9t = 3 \end{cases}$$

g)

$$\begin{cases} x + 2y + 3t = 1 \\ -y + 9z = 2 \\ -2y + 19z - t = 3 \\ 5x + 11y - 9z + 16t = 4 \end{cases}$$

Exercice 4
Résoudre les systèmes suivants.

a)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 5z & = & 13 \\ 2x & + & 4y & - & 5z & = & -12 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 3 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 2y & - & z & = & 1 \\ -2x & - & 4y & + & 3z & = & -1 \\ x & + & y & - & 3z & = & -6 \end{array}\right.$$

c)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 2z & & & = & 2 \end{array}\right.$$

d)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & 2t & = & 6 \\ 2x & - & y & - & 2z & - & 3t & = & 8 \\ 3x & + & 2y & - & z & + & 2t & = & 4 \\ 2x & - & 3y & + & 3z & + & t & = & -8 \end{array}\right.$$

e)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ -x & - & \frac{1}{2}y & + & \frac{1}{2}z & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

f)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & & & + & 2z & & & = & 0 \\ & & 3y & + & z & + & 3t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

Résolution de systèmes linéaires paramétrés

Exercice 5
Déterminer selon les valeurs de a, b et c le nombre de solutions du système. Calculer l'ensemble des solutions lorsque celui-ci est non vide.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & a \\ -2x & - & 3y & + & 3z & = & b \\ x & + & y & - & 2z & = & c \end{array}\right.$$

Exercice 6
Résoudre, en discutant selon la valeur du paramètre m, les systèmes suivants.

a)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -m & x & - & & y & = & 0 \\ -3 & x & + & (2-m) & y & = & 0 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -m & x & - & & y & = & 0 \\ & x & - & m & y & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 7
Résoudre, en discutant selon la valeur du paramètre m, les systèmes suivants.

a)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} (1-m) & x & + & 2 & y & - & & z & = 0 \\ -2 & x & - & (3+m) & y & + & 3 & z & = 0 \\ & x & + & & y & - & (2+m) & z & = 0 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{rrcrcrcrcr} & (2-m) & x & - & & y & + & 5 & z & = 0 \\ - & & x & + & (2-m) & y & + & 7 & z & = 0 \\ - & & x & + & 2 & y & + & (7-m) & z & = 0 \end{array}\right.$$

c)

$$\left\{\begin{array}{rrcrcrcrcr} - & (1+m) & x & + & 2 & y & + & 3 & z & = 0 \\ - & & x & - & m & y & + & & z & = 0 \\ & & x & + & & y & - & (1+m) & z & = 0 \end{array}\right.$$

d)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} (3-m)\,x & + & y & - & 5\,z & = & 0 \\ & - & (1+m)\,y & & & = & 0 \\ 4\,x & + & y & - & (6+m)\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

Manipulations de base sur les matrices

Exercice 8

Parmi ces matrices, lesquelles sont triangulaires supérieures ? Inférieures ? Diagonales ? Inversibles ?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ ***e)*** $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ ***g)*** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -9 & 8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ ***d)*** $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ ***f)*** $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ***h)*** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 9

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A+B$, $2A-B$, AB, BA, $(AB)^T$ et $B^T\,A^T$.

b) Calculer $3(A-2B)+2(3B+C)-(2A+C)$.

c) Résoudre l'équation $A-3X=2B$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 10

Calculer LC et CL, où $L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11

Soit $(A,B) \in \big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\big)^2$.

a) Développer et simplifier $S = (2A)(3B) - (A+2B)^2 + (A-B)(A+B)$.

b) Même question pour $T = (A+B)(2A^2-2B) - 2A^2(A+B) + (-A+B)^2$.

Produit de matrices via la formule du cours (définition)

Exercice 12

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $S(A)$ la somme des termes de A.

On note $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice $J = (1)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.

Vérifier que : $J \times A \times J = S(A) \cdot J$.

Exercice 13

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soient i, j dans $[\![1, n]\!]$.

On note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient $e_{i,j}$ égal à 1.

a. Calculer $E_{i,j} \times M$ et $M \times E_{i,j}$.

b. Calculer $E_{i,j} \times E_{k,l}$.
(on pourra utiliser la notation $\delta_{i,j}$ qui désigne 1 si $i=j$ et 0 sinon)

Exercice 14

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n dans chacun des cas suivants.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Équations matricielles

Exercice 15

Déterminer toutes les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(*i.e.* l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, telles que $AM = MA$)

Exercice 16
On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.
Résoudre dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $A^2 = B$, d'inconnue A.

Exercice 17
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer toutes les matrices $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$.
b) Déterminer toutes les matrices $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA = 0$.

Matrices symétriques, antisymétriques, transposée

Exercice 18
Soient $C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
Démontrer que $(C \times D)^T = D^T \times C^T$.

Exercice 19

1) Exhiber les matrices à la fois antisymétriques et diagonales.
2) Montrer que $A\,A^T$ est symétrique pour toute matrice A.
3) Soient A, B deux matrices symétriques.
  a) Montrer que : AB est symétrique $\Leftrightarrow$ $AB = BA$
  b) Que dire si elles sont antisymétriques ?
  c) Si l'une est symétrique et l'autre antisymétrique ?

Trace d'une matrice

Exercice 20
Pour toute matrice carrée $A = (a_{ij})$, de taille $n \times n$, on appelle *trace* de A, et on note $\text{tr}(A)$, le nombre $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{kk}$.

a) Quelle est la trace de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$? Que valent $\text{tr}(I_n)$ et $\text{tr}(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})})$?
b) Démontrer, pour tout $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$: $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$.
c) Démontrer, pour tout $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$: $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
d) En déduire que l'équation $AB - BA = I$, d'inconnues $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, n'a pas de solution.

Exercice 21
Trouver toutes les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\text{tr}(A\,A^T) = 0$.

Inverse d'une matrice A

Exercice 22

a) Soit A une matrice inversible.
Démontrer que l'inverse de A est définie de manière unique.
b) Soient A et B deux matrices carrées inversibles.
Montrer que AB est inversible et que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
c) Soient A et B deux matrices carrées non nulles, vérifiant $AB = 0$.
Montrer que ni A ni B n'est inversible.
d) Donner un exemple de matrices carrées A et B non nulles tq : $AB = 0$.

Exercice 23
Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que :

- B admet une inverse à gauche : $\exists A_1 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ A_1 B = I_n$.
- B admet une inverse à droite : $\exists A_2 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ B A_2 = I_n$.

Montrer que $A_1 = A_2$.

Obtention de l'inverse de A par une relation $AB = I_n$

Exercice 24

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = 2\,I_3 - A$.

b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 25

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^3 - A$.

b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 26

On considère les matrices suivantes A et B suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer A^2, A^3 puis montrer que $A^3 - A^2 - A + I = 0$.

b) En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

c) Montrer que $B^3 - 3B^2 + 2B = 0$.

d) En déduire que B n'est pas inversible.

Exercice 27

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $A^2 - A - 2I = 0$.

b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 28

Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $AB = A + I_n$.

a) Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

b) En déduire que : $AB = BA$.

Calcul d'inverse par pivot de Gauss

Exercice 29

Calculer l'inverse des matrices carrées suivantes.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Puissance $m^{\text{ème}}$ par récurrence

Exercice 30

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I$.

a) Montrer que $B^2 = 3B$.

b) En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = 2^n I + \dfrac{5^n - 2^n}{3} B$.

Puissance $m^{\text{ème}}$ par la formule du binôme

Exercice 31

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Soit $B = A - I_3$. Calculer B^2, B^3 et en déduire B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculer (simplifier !) A^n par la formule du binôme.

Exercice 32

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $(A-I)^2 = 0$.

b) En utilisant le fait que $A = (A-I)+I$, calculer A^n pour $n \geqslant 2$.

Exercice 33

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer M^n pour tout entier n.

Exercice 34

Soit P une matrice carrée telle que $P^2 = P$.

a) Montrer que si P est inversible, alors $P = I$.
Donner un exemple de matrice P qui n'est ni nulle ni égale à I.

b) Montrer que la matrice $Q = I - P$ vérifie aussi $Q^2 = Q$.

c) Montrer que $PQ = QP = 0$.

d) Calculer $(I+P)^n$, pour tout entier naturel n.

Puissance $m^{\text{ème}}$ de matrices et suites définies par récurrence

Exercice 35

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $A^2 = A + 2I$.
En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2,\ A^n = u_n A + v_n I$.
On précisera les relations de récurrence entre u_{n+1}, u_n, v_{n+1} et v_n.

c) On pose $\alpha_n = 2u_n + v_n$ et $\beta_n = u_n - v_n$.
Reconnaître les suites (α_n) et (β_n).

d) En déduire u_n et v_n puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 36

On considère les deux suites réelles (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 3$ et les relations de récurrences $u_{n+1} = 6u_n - v_n$ et $v_{n+1} = u_n + 4v_n$.

a) Montrer qu'il existe une matrice A telle que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

b) Montrer qu'on peut décomposer A sous la forme $A = 5I + J$, où J est une matrice qui vérifie $J^2 = 0$. En déduire A^n pour tout $n \geqslant 0$.

c) Obtenir alors les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 37

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2,\ u_1 = 1,\ u_2 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ Q = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que $Q = P^{-1}$.

b) Que vaut $D = QAP$? En déduire D^n.

c) Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $A^n = PD^nQ$.
En déduire les coefficients de A^n.

d) Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
Vérifier que $X_{n+1} = AX_n$ et en déduire une expression de u_n suivant n.

Vers la 2^{ème} année

Exercice 38

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note : $E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda \cdot X\}$.

1. Dans la suite de l'exercice, on note $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- ***a)*** Déterminer $E_1(A)$.
- ***b)*** Déterminer $E_{-2}(A)$.
- ***c)*** Déterminer $E_3(A)$.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- ***a)*** Démontrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
- ***b)*** Démontrer que la matrice définie par $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
  Déduire de cette écriture une écriture de la matrice A en fonction des matrices P et D.
- ***c)*** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

3. La formule de la question ***2.c)*** est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Exercice 39

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda \cdot X\}$.

1. ***a)*** Déterminer $E_1(A)$.

- ***b)*** Déterminer $E_2(A)$.
- ***c)*** Déterminer $E_3(A)$.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

- ***a)*** Démontrer que P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- ***b)*** Démontrer que la matrice définie par $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
  Déduire de cette écriture une écriture de la matrice A en fonction des matrices P et D.
- ***c)*** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.