DS1

Exercice : Cours

1. Écrire une fonction **Python** calculant la première position du maximum d'une liste `L`.

Démonstration.

```python
def maximum(A) :
    M = A[0]
    ind = 0
    for i in range(len(A)) :
        if A[i] > M :
            M = A[i]
            ind = i
    return ind
```

□

2. *Tri fusion*

a) Implémenter la fonction `fusion` qui prend en paramètre deux listes triées `L1` et `L2` et renvoie la liste `L` qui réalise la fusion des deux listes précédentes.

Démonstration.

```python
def fusion(L1, L2) :
    # renvoie la liste issue de la fusion de L1 et L2
    L = []
    i,j = 0,0 # i parcourt L1 et j parcourt L2
    m,n = len(L1), len(L2)
    for k in range(m + n) :
        if i < m and (j==n or L1[i] <= L2[j]):
            L = L + [L1[i]]
            # ou L.append(L1[i])
            i = i + 1
        else :
            L = L + [L2[j]]
            # ou L.append(L2[j])
            j = j + 1
    return L
```

□

b) Implémenter la fonction `tri_fusion` qui prend en paramètre une liste `L`, trie cette liste selon le principe du tri fusion et renvoie la liste obtenue.

Démonstration.

```
def tri_fusion(L) :
    # renvoie la liste issue du tri fusion fusion de L
    n = len(L)
    if n <= 1 :
        return L
    else :
        m = n // 2
        return fusion(tri_fusion(L[:m]), tri_fusion(L[m:]))
```

□

Problème : Trafic routier

Ce problème concerne la conception d'un logiciel d'étude de trafic routier. On modélise le déplacement d'un ensemble de voitures sur des files à sens unique (voir Figure 1 et 2). C'est un modèle simple qui peut permettre de comprendre l'apparition d'embouteillages et de concevoir des solutions pour fluidifier le trafic.

Notations :
Soit `L` une liste. Soit `p` $\in \mathbb{N}$.

- on note `len(L)` sa longueur ;
- pour tout `i` $\in [\![0, \texttt{len(L)} - 1]\!]$, l'élément de la liste d'indice i est noté `L[i]` ;
- pour tout `(i, j)` $\in [\![0, \texttt{len(L)}]\!]$ tel que : $i < j$, on note `L[i : j]` la sous-liste composée des éléments `L[i]`, ..., `L[j - 1]` ;
- `L * p` est la liste obtenue en concaténant `p` copies de `L`. Par exemple, `[0] * 3` est la liste `[0, 0, 0]`.

Figure 1 Représentation d'une file de longueur onze comprenant quatre voitures, situées respectivement sur les cases d'indices 0, 2, 3 et 10.

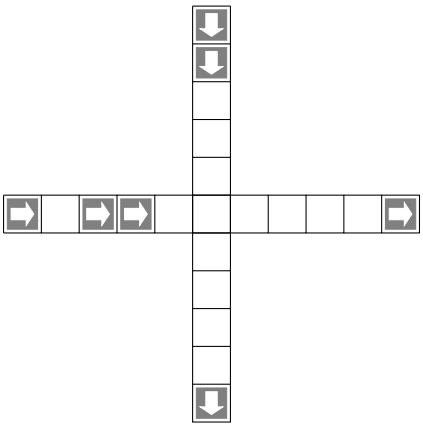


Figure 2 Configuration représentant deux files de circulation à sens unique se croisant en une case. Les voitures sont représentées par un carré gris.

Partie 1 : Préliminaires

Dans un premier temps, on considère le cas d'une seule file, illustré par la Figure 1. Une file de longueur n est représentée par n cases. Une case peut contenir au plus une voiture. Les voitures présentes dans une file circulent toutes dans la même direction (sens des indices croissants, désigné par les flèches sur la Figure 1) et sont indifférenciées.

1. Expliquer comment représenter une file de voitures à l'aide d'une liste de booléens.

Démonstration.
On représente une file de longueur `n` par la liste `L` de longueur `n` définie, pour tout `i` $\in [\![0, \texttt{n} - 1]\!]$, par :

$$\texttt{L[i]} = \begin{cases} \texttt{True} & \text{si la position i est occupée par une voiture} \\ \texttt{False} & \text{sinon} \end{cases}$$

□

2. Donner une instruction **Python** permettant de définir une liste `A` représentant la file de voitures illustrée par la Figure 1.

Démonstration.

On propose l'instruction suivante :

```
A = [True, False] + 2 * [True] + 6 * [False] + [True].
```

Commentaire

On pouvait aussi proposer les instructions suivantes :

- fournir une liste remplie manuellement :

  `A` = [`True`, `False`, `True`, `True`, `False`, `False`, `False`, `False`, `False`, `False`, `True`]

- remplir la liste `A` à l'aide d'une structure itérative :

```
1  A = [False] * 11
2  for i in [0, 2, 3, 10] :
3      A[i] = True
```

□

3. Soit `L` une liste représentant une file de longueur n. Soit `i` $\in [\![0, n-1]\!]$. Définir en **Python** la fonction `occupe` de paramètres `L` et `i` qui renvoie `True` lorsque la case d'indice `i` de la file est occupée par une voiture et `False` sinon.

Démonstration.

```
1  def occupe(L, i) :
2      return L[i]
```

□

4. Combien existe-t-il de files différentes de longueur n ? Justifier votre réponse.

Démonstration.
Une file de longueur n est entièrement déterminée par :

- × la présence ou non d'une voiture dans la case 1 : 2 possibilités,
- × la présence ou non d'une voiture dans la case 2 : 2 possibilités,
- × ...
- × la présence ou non d'une voiture dans la case n : 2 possibilités,

Il y a donc $\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ fois}} = 2^n$ files de longueur n différentes.

□

5. Écrire une fonction `egal` de paramètres `L1` et `L2` retournant un booléen permettant de savoir si deux listes `L1` et `L2` sont égales.

Démonstration.

```
1  def egal(L1, L2) :
2      return L1 == L2
```

Commentaire

On pouvait également effectuer la comparaison de `L1` et de `L2` élément par élément.

```
def egal(L1, L2) :
    n1 = len(L1)
    n2 = len(L2)
    if n1 != n2 :
        return False
    for i in range(n1) :
        if L1[i] != L2[i] :
            return False
    return True
```

□

6. Quelle est la complexité, dans le pire cas, de la fonction `egal` ? Autrement dit, combien de comparaisons de booléens cette fonction effectue-t-elle, au maximum ?

Démonstration.

- On atteint le nombre maximal de comparaisons lorsque les deux listes `L1` et `L2` :
  - × sont de même longueur n,
  - × vérifient : $\forall \texttt{i} \in [\![0, n-1]\!]$, $\texttt{L1[i]} = \texttt{L2[i]}$

  Autrement dit, dans le cas où `L1` et `L2` sont égales.
- Dans ce cas, on effectue $\text{Card}\left([\![0, n-1]\!]\right) = n$ comparaisons.

La complexité, dans le pire cas, de la fonction `egal` est linéaire. Plus précisément, on effectue au plus n comparaisons pour des listes de longueurs n.

□

7. Préciser le type d'objet renvoyé la fonction `egal`.

Démonstration.

La fonction `egal` renvoie un booléen (une variable de type `bool`).

□

Partie 2 : Déplacement de voitures dans la file

On identifie désormais une file de voitures à une liste. On considère les schémas de la Figure 3 représentant des exemples de files. Une étape de simulation pour une file consiste à déplacer les voitures de la file, à tour de rôle, en commençant par la voiture la plus à droite, d'après les règles suivantes :

- une voiture se trouvant sur la case la plus à droite de la file sort de la file ;
- une voiture peut avancer d'une case vers la droite si elle arrive sur une case inoccupée ;
- une case libérée par une voiture devient inoccupée ;
- la case la plus à gauche peut devenir occupée ou non, selon le cas considéré.

On suppose avoir écrit en **Python** la fonction `avancer` prenant en paramètres une liste de départ `L`, un booléen `b` indiquant si la case la plus à gauche doit devenir occupée lors de l'étape de simulation, et renvoyant la liste obtenue par une étape de simulation.

Par exemple, l'application de cette fonction à la liste illustrée par la Figure 3(a) permet d'obtenir soit la liste illustrée par la Figure 3(b) lorsque l'on considère qu'aucune voiture nouvelle n'est introduite, soit la liste illustrée par la Figure 3(c) lorsque l'on considère qu'une voiture nouvelle est introduite.

(a) Liste initiale `A`

(b) `B = avancer(A, False)`

(c) `C = avancer(A, True)`

Figure 3 Étape de simulation

8. Pour la liste `A` définie à la question ***2.***, que renvoie `avancer(avancer(A, False), True)` ?

Démonstration.

- Tout d'abord `avancer(A, False)` renvoie `B` (en Figure 3(b)).
  Ainsi `avancer(avancer(A,False),True)` renvoie la même chose que `avancer(B,True)`.
- L'instruction `avancer(B, True)` permet de représenter la file suivante :

La liste renvoyée par `avancer(avancer(A, False), True)` sera donc :
`[True, False, True, False, True, True, False, False, False, False, False]` □

9. On considère `L` une liste et `m` l'indice d'une case de cette liste (`m` $\in [\![0, \texttt{len(L)} - 1]\!]$). On s'intéresse à une étape partielle où seules les voitures situées sur la case d'indice `m` ou à droite de cette case peuvent avancer normalement, les autres voitures ne se déplaçant pas.

Par exemple, la file  devient  .
m m

Définir en **Python** la fonction `avancer_fin` de paramètres `L` et `m` qui réalise cette étape partielle de déplacement et renvoie le résultat dans une nouvelle liste sans modifier `L`.

Démonstration.
L'étape de déplacement consiste à décaler vers la droite tous les éléments d'indice supérieur ou égal à `m` de la liste `L`. On obtient la fonction suivante.

```
1  def avancer_fin(L, m) :
2      n = len(L)
3      return L[:m] + [False] + L[m:]
```

□

10. Soient `L` une liste, `b` un booléen et `m` l'indice d'une case inoccupée de cette liste. On considère une étape partielle où seules les voitures situées à gauche de la case d'indice `m` se déplacent, les autres voitures ne se déplacent pas. Le booléen `b` indique si une nouvelle voiture est introduite sur la case la plus à gauche.

Par exemple, la file  devient  lorsque aucune nouvelle voiture n'est introduite.
m m

Définir en **Python** la fonction `avancer_debut` de paramètres `L`, `b` et `m` qui réalise cette étape partielle de déplacement et renvoie le résultat dans une nouvelle liste sans modifier `L`.

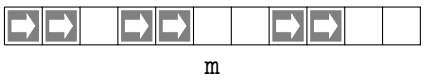
Démonstration.
L'étape de déplacement consiste cette fois à :

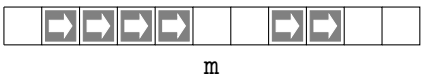
- × décaler vers la droite tous les éléments d'indice strictement inférieur à `m` de la liste `L`. On obtient la fonction suivante.
- × mettre à jour le premier élément de la liste `L` pour qu'il contienne la valeur `b`.

```
1  def avancer_debut(L, b, m) :
2      n = len(L)
3      return [b] + L[:m] + L[(m+1):]
```

□

11. On considère une liste `L` dont la case d'indice `m` > 0 est temporairement inaccessible et bloque l'avancée des voitures. Une voiture située immédiatement à gauche de la case d'indice `m` ne peut pas avancer. Les voitures situées sur les cases plus à gauche peuvent avancer, à moins d'être bloquées par une case occupée, les autres voitures ne se déplacent pas. Un booléen `b` indique si une nouvelle voiture est introduite lorsque cela est possible.

Par exemple, la file 

devient 

lorsque aucune nouvelle voiture n'est introduite.

Définir en **Python** la fonction `avancer_debut_bloque` de paramètres `L`, `b` et `m` qui réalise cette étape partielle de déplacement et renvoie le résultat dans une nouvelle liste.

Démonstration.
On propose la fonction récursive suivante.

```
1  def avancer_debut_bloque(L, b, m) :
2      if m == 0 :
3          return L
4      elif occupe(L, m-1) :
5          return avancer_debut_bloque(L, b, m-1)
6      else :
7          avancer_debut(L, b, m-1)
```

Commentaire

On pouver également proposer une version impérative de la fonction précédente.

```
1  def avancer_debut_bloque(L, b, m) :
2      i = m - 1
3      while i >= 0 and occupe(L, i) :
4          i = i - 1
5      # la structure itérative précédente permet d'obtenir le plus
6      # grand indice i tel que la position i est libre
7      if i < 0 :
8          return L
9      else :
10         return avancer_debut(L, b, i)
```

□

Partie 3 : Une étape de simulation à deux files

On considère dorénavant deux files `L1` et `L2` de même longueur impaire se croisant en leur milieu. On note `m` l'indice de la case du milieu.

- La file `L1` est toujours prioritaire sur la file `L2`.
- Les voitures ne peuvent pas quitter leur file et la case de croisement ne peut être occupée que par une seule voiture.
- Les voitures de la file `L2` ne peuvent accéder au croisement que si une voiture de la file `L1` ne s'apprête pas à y accéder.
- Une étape de simulation à deux files se déroule en deux temps.
  - × Dans un premier temps, on déplace toutes les voitures situées sur le croisement ou après.
  - × Dans un second temps, les voitures situées avant le croisement sont déplacées en respectant la priorité.

Par exemple, partant d'une configuration donnée par la Figure 4, les configurations successives sont données par les Figures 4(b), 4(c), 4(d), 4(e) et 4(f) en considérant qu'aucune nouvelle voiture n'est introduite.

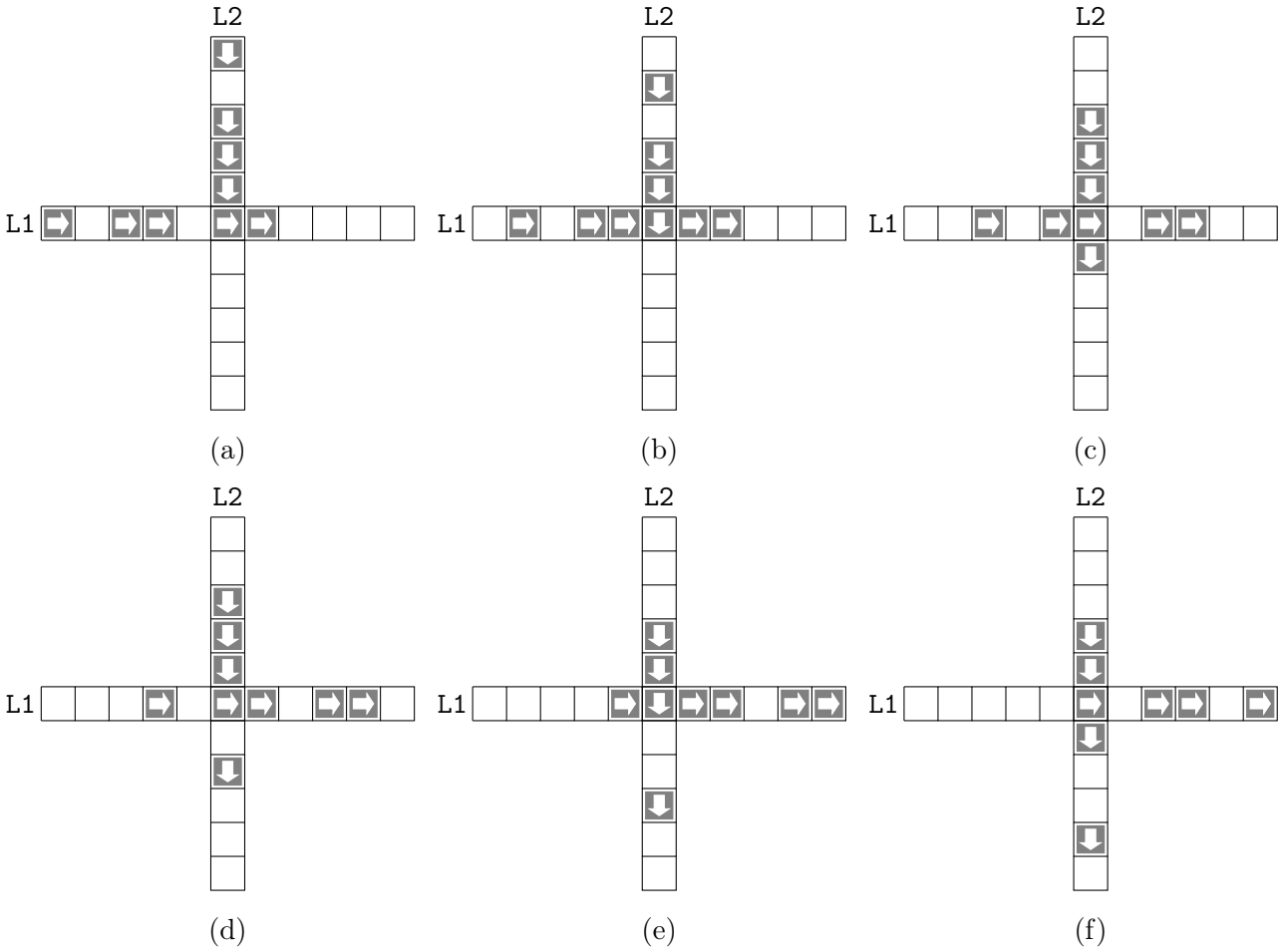


Figure 4 Étapes de simulation à deux files

L'objectif de cette partie est de définir en **Python** l'algorithme permettant d'effectuer une étape de simulation pour ce système à deux files.

12. En utilisant le langage **Python**, définir la fonction `avancer_files` de paramètres `L1`, `b1`, `L2` et `b2` qui renvoie le résultat d'une étape de simulation sous la forme d'une liste de deux éléments notée `[R1, R2]` sans changer les listes `L1` et `L2`. Les booléens `b1` et `b2` indiquent respectivement si une nouvelle voiture est introduite dans les files `L1` et `L2`. Les listes `R1` et `R2` correspondent aux listes après déplacement.

Démonstration.
On procède de la façon suivante :

1) On suit la règle de priorité fournie par l'énoncé : on commence par faire avancer les voitures de la file `L1` sans blocage.

2) On fait avancer la file `L2` en tenant compte d'un éventuel blocage à l'intersection.

```
1  def avancer_files(L1, L2, b1, b2) :
2      n = len(L1)
3      m = (n - 1) // 2
4      R1 = avancer(L1, b1)
5      if occupe(R1, m) :
6          L2bis = avancer_fin(L2, m)
7          R2 = avancer_debut_bloque(L2bis, b2, m)
8      else :
9          R2 = avancer(L2, b2)
10     return [R1, R2]
```

Commentaire

Conformément à l'énoncé, on a supposé que la fonction `avancer` était déjà écrite. On peut cependant l'obtenir simplement avec le script suivant.

```
1  def avancer(L, b) :
2      n = len(L)
3      return avancer_debut(L, b, n - 1)
```

□

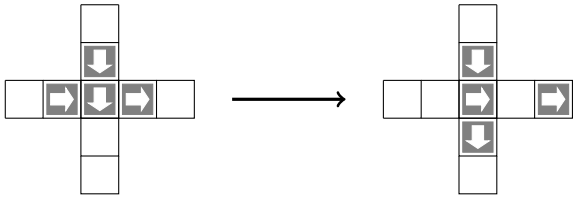
13. On considère les listes

$$\texttt{D} = [\texttt{False}, \texttt{True}, \texttt{False}, \texttt{True}, \texttt{False}]$$

$$\texttt{E} = [\texttt{False}, \texttt{True}, \texttt{True}, \texttt{False}, \texttt{False}]$$

Que renvoie l'appel `avancer_files(D, False, E, False)` ?

Démonstration.
L'instruction `avancer_files(D, False, E, False)` correspond au déplacement suivant.



L'appel `avancer_files(D, False, E, False)` renvoie donc la liste de listes :

`[[False, False, True, False, True], [False, True, False, True, False]]`

□