Thème 4 : Probabilités

I. Mise en jambe : lois discrètes usuelles

Exercice 1
On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{4})$.

Déterminer la valeur, si elles existent, des quantités suivantes.

a) $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
b) $\mathbb{E}(X-3)$ et $\mathbb{V}(X-3)$.
c) $\mathbb{E}(2X)$ et $\mathbb{V}(2X)$.
d) $\mathbb{E}(X^2)$.

II. Méthodologie : Calcul de probabilités

Afin de résoudre un exercice de calcul de probabilités, il faudra penser au schéma suivant.

0) Introduction des événements basiques (le fait d'avoir tiré une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage, le fait d'avoir obtenu pile au $i^{\text{ème}}$ tirage, le fait d'avoir obtenu un 6 au $i^{\text{ème}}$ tirage ...) liés à l'expérience considérée.
Nommage de l'événement A dont on cherche à déterminer la probabilité.
(ces deux étapes sont parfois directement données dans l'énoncé)

1) Décomposition de l'événement A à l'aide d'événements basiques.

2) Deux cas se présentent alors :

(i) si cette décomposition fait apparaître une union, il faut retenir le triptyque :

$$\boxed{\text{union / incompatibilité / somme}}$$

Dans le cas d'une union finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette union (cas d'une union croissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles.
  - × si c'est le cas, on utilise l'additivité de $\mathbb{P}$.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la formule du crible.

Dans le cas d'une union infinie d'événements

- On vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles :
  - × si c'est le cas, on utilise la σ-additivité de $\mathbb{P}$.
  - × si ce n'est pas le cas, on se ramène au cas d'une union finie d'événements en utilisant le théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une intersection d'événements en considérant la formule liant probabilité d'un événement à la probabilité de l'événement contraire.

(ii) si cette décomposition fait apparaître une intersection, il faut retenir le triptyque :

$$\boxed{\text{intersection / indépendance / produit}}$$

Dans le cas d'une intersection finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette intersection (cas d'une intersection décroissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont mutuellement indépendants.
  - × si c'est le cas, on utilise la formule associée.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la Formule des Probabilités Composées (FPC).

Dans le cas d'une intersection infinie d'événements

- On se ramène au cas d'une intersection finie d'événements en utilisant le théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une union d'événements en considérant la formule liant probabilité d'un événement à la probabilité de l'événement contraire.

Remarque

- L'étape de décomposition des événements est **primordiale**.
  On raisonne `TOUJOURS` sur les événements et `JAMAIS` directement sur les probabilités.

  ~~$\mathbb{P}(A) = 0$ car c'est la probabilité d'obtenir ...~~

  (cf démarche de l'exrcice sur la limite monotone)
- Lorsqu'il s'agit de raisonner sur les événements, on adopte la rédaction suivante :

  ~~L'événement A signifie que ...~~

  L'événement A est réalisé si et seulement si ... ✓
- Afin de déterminer une probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(B)$ on pourra rédiger comme suit :

  Si l'événement A est réalisé, **c'est que** ...

  Dans ce cas, l'événement B **est réalisé si et seulement si** ...

III. Séance 1 : formule des probabilités composées

Exercice 2

Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et une boule rouge. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard selon le protocole suivant :

- si on obtient une boule bleue, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule bleue supplémentaire ;
- si on obtient la boule rouge, on la remet dans l'urne et on arrête l'expérience.

On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher et on admet que l'expérience s'arrête avec une probabilité égale à 1. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience.

1. Montrer soigneusement : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \mathbb{P}\big(\{N = n\}\big) = \dfrac{1}{n\,(n-1)}$.

2. Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction **Python** suivante de façon à ce qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire N.

```python
import random as random

def simuleN() :
    b = 1 # b désigne le nombre de boules bleues dans l'urne
    while random.random() < ..........
        b = b + 1
    N = ..........
    return N
```

Exercice 3

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.

Pour chaque i de $[\![1, n-1]\!]$, on note B_i l'événement : « le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche », on pose $\overline{B_i} = N_i$, et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X.

2. ***a)*** Pour tout i de $[\![2, n-1]\!]$, justifier : $\mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.

b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $\mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)$, pour tout k de $X(\Omega)$.

c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

IV. Séance 2 : formule des probabilités totales

Commentaire

Il est à noter que la Formule des Probabilités Totales (FPT) rentre dans le schéma décrit dans la partie II. En effet, si la famille $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements, alors tout événement B s'écrit comme une réunion d'événements 2 à 2 incompatibles.

$$B \;=\; \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cap B \;=\; \bigcup_{i\in I} \big(A_i \cap B\big)$$

C'est cette écriture qui permet de conclure : $\mathbb{P}(B) \;=\; \sum\limits_{i\in I} \mathbb{P}\big(A_i \cap B\big)$.

Exercice 4

1. On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\dfrac{1}{2}$ et celle d'obtenir Face vaut également $\dfrac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant Face à coup sûr et une troisième pièce numérotée 2, donnant Pile à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient Pile au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier Pile. On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Pile.
Déterminer $\mathbb{P}(\{X = 1\})$.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires *de même loi* à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$.
On suppose en outre X et Y indépendantes.
Démontrer : $\mathbb{P}(\{X = Y\}) \;=\; \sum\limits_{k=0}^{n} \big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big)^2$.

3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs entières.
Démontrer : $\mathbb{P}(\{X \leqslant Y\}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = n\})\,\mathbb{P}(\{Y \geqslant n\})$.

Exercice 5

Une entreprise de construction produit des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre.
Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes.
On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. De plus :

- la probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est $0,1$.
- la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est $0,2$.

On considère l'événement E : « l'objet provient de la chaîne A ».

On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Quelle est la probabilité que cet objet provienne de la chaîne A ?

V. Séance 3 : variables discrètes

Commentaire

Dans un énoncé de probabilités discrètes, on manipule différents niveaux d'objets.

1) Au premier niveau, on trouve l'expérience aléatoire considérée.
On note Ω l'univers des possibles : c'est **l'ensemble** des résultats possibles (appelés aussi issues) de l'expérience. Si on considère l'expérience consistant à effectuer trois lancers successifs d'une même pièce, alors : $\Omega \ = \ \{P, F\}^3$.
Autrement dit, Ω est l'ensemble des triplets à coefficitents dans l'ensemble $\{P, F\}$.
Ces triplets pouront être nommés des 3-lancers (on s'adapte ainsi au vocabulaire des probabilités).
Par exemple, $\omega = (F, F, P)$ est un 3-lancer qui est un résultat possible de l'expérience. Ce résultat est obtenu si le 1^{er} lancer fournit $Face$, le $2^{\text{ème}}$ fournit $Face$, le $3^{\text{ème}}$ fournit $Pile$.

2) Au deuxième niveau, on trouve les événements : un événement A n'est rien d'autre qu'un **ensemble** qui regroupe certaines issues de l'expérience. Ainsi : $A \subset \Omega$ (un événement est un sous-ensemble de l'univers). Par exemple, l'événement P_1 : « obtenir $Pile$ au premier lancer » regroupe tous les 3-lancers dont le premier coefficient vaut P.

$$P_1 \ = \ \{ \ (P, F, F), \ (P, F, P), \ (P, P, F), \ (P, P, P) \ \}$$

Par exemple, $\omega = (P, F, F) \in P_1$. Lorsque $\omega \in P_1$, on dit que ω **réalise** l'événement P_1.

3) Au troisième niveau, on trouve les v.a.r. . Ce sont des **applications** particulières :

- elles prennent comme argument **un résultat possible de l'expérience** et renvoient **une valeur réelle**. Consisdérons la v.a.r. X qui donne le nombre de Pile obtenus au cours de l'expérience. Avec le 3-lancer ω précédent, on obtient : $X(\omega) = X\Big((P, F, F)\Big) = 1$.
  Cela démontre que la v.a.r. X peut prendre la valeur 1 (on a exhibé un 3-lancer ω tel que $X(\omega) = 1$).
- elles sont des machines à créer des événements. Par exemple, $\{X = 2\}$ est un événement.
  Il regroupe **tous** les 3-lancers ω tels que : $X(\omega) = 2$.
  Autrement dit : $\{X = 2\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 2\} = \{ \ (P, P, F), \ (P, F, P), \ (F, F, P) \ \}$.

Ce deuxième point nous replonge au deuxième niveau. Ainsi, pour comprendre le chapitre sur les v.a.r. , il est donc essentiel de maîtriser celui sur les probabilités générales.

Exercice 6

1. Une puce se déplace en faisant des sauts aléatoires sur un axe gradué. Initialement à l'origine, la puce se déplace à chacun de ses sauts d'une unité vers la droite avec probabilité $p \in]0, 1[$, ou d'une unité vers la gauche avec probabilité $1 - p$. On note Y_n le nombre de fois où elle s'est déplacée vers la droite entre le premier et le $n^{\text{ème}}$ saut (compris).
Quelle est la loi de Y_n ?

2. Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. On suppose que les conducteurs arrivant au péage choisissent leur file au hasard et indépendamment des autres. On note Z le numéro du guichet choisi par le 1^{er} conducteur arrivant au péage.
Quelle est la loi de Z ?