

Thème 2 : algèbre linéaire (matrices et endomorphismes)

I. Séance 1 : produit matriciel

Exercice 1

1. Pour les exemples suivants, dire si les produits matriciels AB et BA sont bien définis ou non. S'ils sont définis, les calculer ; s'ils ne sont pas définis, expliquer pourquoi.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 8 & -4 & 3 & 7 \end{pmatrix};$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, B = (2 \quad -1 \quad 0 \quad 1).$

2. On considère un vecteur $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels non tous nuls.

Dans la suite, on note $M = X^t X$ et $m = {}^t X X$.

a) Calculer m .

b) (i) Calculer M et en déduire qu'elle est symétrique.

(ii) Calculer $M X$.

3. On considère maintenant un entier n non nul et un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul. On note :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad M = X^t X \quad \text{et} \quad m = {}^t X X$$

a) Calculer m .

b) (i) Démontrer que M est symétrique.

(ii) Calculer $M X$.

Exercice 2. (**)

Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A et on note $\text{tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A , c'est-à-dire $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

1. Montrer que l'application $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, est linéaire.

$$A \mapsto \text{tr}(A)$$

2. Montrer : $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

3. Vérifier, pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \text{tr}({}^t A A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2$.

II. Séance 2 : calcul d'inverse

II.1. Définition de l'inverse et utilisation d'une relation matricielle

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Quelle propriété démontre que $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'inverse de A ?

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrez que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Trouver une relation entre J^2 , J et I .

b) Montrer que J est inversible et donner son inverse en fonction de J et I .

4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^2 - 4A$.

b) En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A et I .

5. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer les matrices $(A - I)^2$ et $(A - I)^3$.

b) En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A et I .

II.2. Reconnaître les matrices non inversibles

Commentaire

Pour démontrer qu'une matrice carrée M est non inversible, on peut utiliser l'une des propriétés suivantes :

M est triangulaire et l'un (au moins) de ses coefficients diagonaux est nul $\Rightarrow M$ est non inversible

M possède deux colonnes (resp. lignes) égales $\Rightarrow M$ est non inversible

M possède deux colonnes (resp. lignes) colinéaires. $\Rightarrow M$ est non inversible

On utilisera à bon escient l'une ou l'autre de ces propriétés dans les exercices suivants. Ces propriétés seront détaillées dans l'année (notamment lors de la définition du rang d'une matrice).

Exercice 4

Sans faire de calcul, expliquez pourquoi les matrices suivantes sont non inversibles.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 3 & -2 & -6 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

II.3. Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2**Commentaire**

Commençons par rappeler la formule d'inversion pour les matrices carrées d'ordre 2.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1) Si $ad - bc = 0$, la matrice A n'est pas inversible.

2) Si $ad - bc \neq 0$, la matrice A est inversible, d'inverse :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Comment retenir cette formule :

× on échange les éléments diagonaux,

× on multiplie les autres par -1 ,

× et on n'oublie pas de multiplier par l'inverse de $ad - bc$ (obtenu par « produit en croix »).

La quantité $q = ad - bc$ est appelé **déterminant de A** . On la note habituellement $\det(A)$.

Cette notion de déterminant est aussi définie pour des matrices $n \times n$ (mais nous ne le ferons pas cette année). On pourra retenir :

$$A \text{ est inversible} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Exercice 5

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, donnez (sans faire de calcul) leur inverse.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

II.4. Inverse par algorithme du pivot de Gauss**Exercice 6**

À l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss, montrer que chacune des matrices suivantes est inversible et déterminer son inverse. On optera pour la présentation matricielle.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

III. Séance 3 : résolution de systèmes

III.1. Savoir utiliser l'algorithme du pivot de Gauss pour résoudre un système linéaire homogène

Exercice 7

1. Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} 3x - 6y + 2z = 0 \\ -x + 4y - 2z = 0 \\ 2x - 5y + z = 0 \end{cases}$$

2. Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

3. Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases}$$

Exercice 8

1. Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

2. Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

3. Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

Exercice 9

1. Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

2. Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 6x - 3y + 9z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

III.2. Savoir utiliser l'algorithme du pivot de Gauss pour déterminer une base d'un « sous-espace propre »

Exercice 10

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note : $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda \cdot X\}$.

Commentaire

- On peut démontrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda(A)$ est un espace vectoriel. Pour ce faire, on démontre que $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Rappelons ci-dessous la manière de procéder.

(i) $E_\lambda(A) \subseteq \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par définition.

(ii) $E_\lambda(A)$ est non vide.

En effet le vecteur nul $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est tel que : $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On en conclut : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_\lambda(A)$.

(iii) Soit $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et soit $(X_1, X_2) \in E_\lambda(A) \times E_\lambda(A)$.

Démontrons : $\mu_1 \cdot X_1 + \mu_2 \cdot X_2 \in E_\lambda(A)$.

Autrement dit, il s'agit de démontrer : $A(\mu_1 \cdot X_1 + \mu_2 \cdot X_2) = \lambda \cdot (\mu_1 \cdot X_1 + \mu_2 \cdot X_2)$.

Remarquons tout d'abord :

× Comme $X_1 \in E_\lambda(A)$ alors : $AX_1 = \lambda \cdot X_1$.

× Comme $X_2 \in E_\lambda(A)$ alors : $AX_2 = \lambda \cdot X_2$.

On a alors :

$$\begin{aligned} A(\mu_1 \cdot X_1 + \mu_2 \cdot X_2) &= A(\mu_1 \cdot X_1) + A(\mu_2 \cdot X_2) \\ &= \mu_1 \cdot (AX_1) + \mu_2 \cdot (AX_2) \\ &= \mu_1 \cdot (\lambda \cdot X_1) + \mu_2 \cdot (\lambda \cdot X_2) && \begin{array}{l} \text{(car } X_1 \in E_\lambda(A) \\ \text{et } X_2 \in E_\lambda(A)) \end{array} \\ &= (\mu_1 \times \lambda) \cdot X_1 + (\mu_2 \times \lambda) \cdot X_2 \\ &= (\lambda \times \mu_1) \cdot X_1 + (\lambda \times \mu_2) \cdot X_2 \\ &= \lambda \cdot (\mu_1 \cdot X_1) + \lambda \cdot (\mu_2 \cdot X_2) \\ &= \lambda \cdot (\mu_1 \cdot X_1 + \mu_2 \cdot X_2) \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien : $\mu_1 \cdot X_1 + \mu_2 \cdot X_2 \in E_\lambda(A)$.

(on a démontré que l'ensemble $E_\lambda(A)$ est stable par combinaisons linéaires)

- La démonstration précédente est donnée ici simplement pour illustrer la méthode consistant à démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de référence. Elle ne sera demandée dans les épreuves.
- Par contre, savoir déterminer une base de $E_\lambda(A)$ constitue un exercice incontournable en 2^{ème} année. Cette question est présente dans **TOUTES** les épreuves de mathématiques. C'est d'ailleurs une excellente nouvelle car cette question se résout très facilement : il s'agit simplement de savoir résoudre un système linéaire homogène ! En effet :

$$\begin{aligned} X \in E_\lambda(A) &\Leftrightarrow AX = \lambda \cdot X \\ &\Leftrightarrow AX - \lambda \cdot X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda \cdot I_3) \cdot X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

1. Dans la suite de l'exercice, on note $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer $E_1(A)$.

b) Déterminer $E_{-2}(A)$.

c) Déterminer $E_3(A)$.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .

b) Démontrer que la matrice définie par $D = P^{-1}AP$ est diagonale.

Déduire de cette écriture une écriture de la matrice A en fonction des matrices P et D .

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

3. La formule de la question 2.c) est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Exercice 11

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda \cdot X\}$.

1. a) Déterminer $E_1(A)$.

b) Déterminer $E_2(A)$.

c) Déterminer $E_3(A)$.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Démontrer que la matrice définie par $D = P^{-1}AP$ est diagonale.

Déduire de cette écriture une écriture de la matrice A en fonction des matrices P et D .

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

IV. Séance 4 : puissances d'une matrice via le binôme de Newton

Exercice 12

On note I la matrice identité d'ordre 3 et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer qu'il existe une unique matrice $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = I + 2H$.
2. Calculer H^2 , puis H^k pour tout $k \geq 2$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer A^n en fonction de I et de H .

Exercice 13

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$.

1. Démontrer que la matrice $A - 2I$ est non inversible. Déterminer $E_2(A)$.
2. Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1} .
3. Démontrer que la matrice $\Delta = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure et trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\Delta = \alpha I + J$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Calculer J^2 , puis J^k pour tout entier $k \geq 2$.
 - b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer Δ^n en fonction de I et J .
 - c) En déduire l'expression matricielle de A^n .

Exercice 14

1. On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Déterminer A^2 . Démontrer alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k = 3^{k-1}A$.
- b) Déterminer B^2 et B^3 . En déduire B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- c) Déterminer C^2 . Conjecturer une formule pour C^k et la démontrer.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

- a) Écrire la matrice M en fonction des matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

V. Séance 5 : calculs de « polynômes caractéristiques » (déterminants à paramètre)

Exercice 15

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer les réels λ pour lesquelles la matrice $A - \lambda I_3$ est non inversible.
- 2) Déterminer les réels λ pour lesquelles la matrice $B - \lambda I_3$ est non inversible.
- 3) Déterminer les réels λ pour lesquelles la matrice $C - \lambda I_2$ est non inversible.

Commentaire

- Rappelons tout d'abord que pour toute matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

La matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est non inversible

$$\Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}, MX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la propriété suivante est vérifiée :

La matrice $A - \lambda \cdot I_n$ est non inversible

$$\Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}, (A - \lambda \cdot I_n) X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

$$\Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}, A X = \lambda X$$

- Dans l'exercice **10** de la séance 3, on détermine l'ensemble des matrices colonnes $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que :
 - × $AX = 1 \cdot X$ (question **1.a**),
 - × $AX = -2 \cdot X$ (question **1.b**),
 - × $AX = 3 \cdot X$ (question **1.c**).

Il est légitime de se poser la question de savoir pourquoi on s'intéresse particulièrement aux réels 1, -2 et 3. Pour ces valeurs, on constate qu'il existe des vecteurs $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nuls tels que $AX = \lambda X$. Ces valeurs $\lambda \in \mathbb{R}$ sont donc exactement celles telles que la matrice $A - \lambda I_3$ est non inversible. On verra l'an prochain que ces valeurs jouent un rôle important. Leur détermination jouent un rôle dans le chapitre « Réduction de matrices » dans lequel on s'intéresse à l'existence d'une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et d'une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que :

$$A = P D P^{-1}$$

Ce chapitre « Réduction » sera détaillé l'an prochain. Pour ces devoirs de vacances, on vérifie simplement la capacité à résoudre un système linéaire ainsi que la capacité à calculer un déterminant (en l'occurrence le déterminant d'une matrice à paramètre).

VI. Séance 6 : algèbre théorique

Exercice 16

Soit E un espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E ($f \in \mathcal{L}(E)$).

- 1) Démontrer : $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f) \Rightarrow f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- 2) Démontrer : $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \Rightarrow \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.
- 3) Conclure.