

Thème 3 : Analyse

I. Préliminaires

- Rappelons tout d'abord qu'on appelle **proposition mathématique** un énoncé auquel on peut attribuer une valeur de vérité (vrai ou faux).

Les énoncés suivants sont des propositions mathématiques.

a) $1 + 1 = 2$

b) $1 + 1 = 3$

c) $\ln(1) = 1$

Cette proposition est vraie. Cette proposition est fausse. Cette proposition est fausse.

Par contre, $1 + 1 - 2$ et $(\sqrt{18})^3$ ne sont pas des propositions puisqu'on ne peut leur attribuer de valeur de vérité. Ce sont des expressions arithmétiques dont le résultat est un réel.

- Il est à noter qu'une proposition mathématique peut comporter des variables. En conséquence, il est possible que la valeur de vérité d'une proposition dépende du choix de ces variables.

a) $x + 2 \geq 4$

× cette proposition est vraie pour tout x plus grand que 2,

× cette proposition est fausse sinon *i.e.* pour tout x strictement inférieur à 2.

b) $\sqrt{x^2} = x$

× cette proposition est vraie pour tout x plus grand que 0,

× cette proposition est fausse sinon *i.e.* pour tout x strictement inférieur à 0.

c) Par contre, $10^x - (\sqrt{y})$ n'est pas une proposition. C'est une expression arithmétique dont le résultat est un réel.

- La valeur de vérité d'une proposition ne dépend pas toujours des variables qu'elle contient. Dans une proposition mathématique, on dit qu'une variable est **muette** (on parle aussi de variable **liée**) si elle est portée par un quantificateur. Ainsi, dans les propositions :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \qquad \exists n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$$

la variable n est muette. Cela signifie qu'on peut renommer la variable n sans que cela ne change le sens de la proposition mathématique. Ainsi, les propositions :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(m) \qquad \exists k \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(k)$$

ont même sens que les propositions précédentes.

Par contre, si on considère seulement la proposition $\mathcal{P}(n)$ (sans faire apparaître de quantificateur devant), on obtient un objet mathématique qui dépend de ce n particulier.

- Il existe d'autres constructions mathématiques pour lesquelles les variables sont muettes.

Par exemple, dans les écritures :

$$\int_0^1 \ln(x+1) dx \qquad \sum_{i=0}^5 2^i$$

on peut renommer la variable x et la variable i en écrivant :

$$\int_0^1 \ln(t+1) dt \qquad \sum_{j=0}^5 2^j$$

sans que cela ne change les valeurs calculées. Les deux variables sont ici liées par un symbole mathématique qui n'est pas un quantificateur mais qui permet quand même d'introduire la variable et son ensemble d'appartenance (x parcourt $[0, 1]$ et i parcourt $\llbracket 0, 5 \rrbracket$).

Commentaire

- Profitons des définitions précédentes pour rappeler qu'un quantificateur permet notamment d'introduire une variable et son ensemble d'appartenance. Une variable n'a pas d'existence propre tant qu'elle n'a pas été introduite. Ainsi, une écriture de la forme : « $\ln(x) \leq x - 1, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$ », n'a AUCUN sens mathématique. En effet, la première partie de la proposition se réfère à une variable x qui n'est introduite qu'après coup. La bonne écriture est évidemment :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x - 1$$

- On rappelle aussi que lorsqu'on est en présence de quantificateurs de natures différentes, l'ordre est important. Par exemple, si on dispose d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, les propositions :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leq M \quad \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$$

n'ont pas du tout le même sens. La seconde signifie que la fonction f est bornée (on est capable de trouver un réel M qui majore TOUTES les valeurs de $f(x)$ i.e. un majorant de $f(x)$ avec x qui parcourt \mathbb{R} en entier). La première proposition signifie que pour chaque valeur particulière de x , on est capable de trouver un réel M (qui peut dépendre de x !) tel que, pour cette valeur particulière de x on ait : $f(x) \leq M$. Toute fonction satisfait cette proposition car, on peut poser, pour chaque choix de x : $M = f(x)$. On obtient bien alors : $f(x) \leq M$.

Exercice 1. Rayer la ou les mentions inutiles

1. Dans l'écriture $f : x \mapsto 1 + x$, la variable x est : ~~libre~~ / liée
 La variable x est muette car c'est la variable de définition de la fonction (une fonction est un mécanisme d'association : à chaque valeur de x est associée une image par la fonction).
2. Dans l'écriture $(\{X = i\})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, la variable i est : ~~libre~~ / liée
 et la variable n est : libre / ~~liée~~
 La variable i est muette (on considère ici, pour tout les entiers i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, les événements $\{X = i\}$).
 La variable n est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).
3. Le résultat de la quantité $\sum_{i=1}^k i$ dépend de : ~~i~~ / ~~k~~ / ~~ni~~ / ~~i~~ / ~~ni~~ / ~~k~~
 La variable i est muette car c'est la variable de sommation (elle est donc sous la portée d'un symbole de sommation \sum).
 La variable k est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).
 Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de la variable k .
4. Une variable muette est : libre / liée
5. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite admettant une limite (finie ou non), ~~dépend de n~~ /
 la quantité $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$: ne dépend pas de n /
 peut dépendre de n

Rappelons quelques définitions :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ (où } \ell \in \mathbb{R}) &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty &\Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty &\Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq A) \end{aligned}$$

La variable n est donc muette car, dans tous les cas, elle est sous la portée d'un quantificateur.

6. Dans l'écriture $\int_0^x f(t) dt$, la variable t est : ~~libre~~ / liée

la variable x est : libre / liée

La variable t est muette car c'est la variable d'intégration (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration \int).

La variable x est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématiques).

7. Dans l'écriture $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ et } y = 0\}$,
 la variable x est : ~~libre~~ / liée
 la variable y est : ~~libre~~ / liée
 la variable z est : ~~libre~~ / liée

Les variables x, y et z sont muettes (on s'intéresse ici à tous les réels x, y et z vérifiant une condition donnée).

8. Dans l'écriture : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$,
 la variable x est : ~~libre~~ / liée
 la variable y est : ~~libre~~ / liée

Les variables x et y sont muettes car elles sont sous la portée d'un quantificateur.

9. Une variable libre : ~~doit toujours~~ / être introduite
 : ~~ne doit jamais~~ / par un « Soit »
 doit parfois

Une variable libre doit parfois être introduite par un « Il existe ».

10. Une variable liée : ~~doit toujours~~ / être introduite
 : ~~ne doit jamais~~ / par un « Soit »
 doit parfois

Une variable muette ne doit jamais être quantifiée.

Exercice 2

a) Pour chacune des expressions suivantes :

(i) déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).

(ii) indiquer, pour chaque variable en présence, si elle est libre ou liée.

Démonstration.

1. $\int_2^3 f(t) dt$

(i) Il s'agit d'un réel.

(ii) La variable t est muette car c'est la variable d'intégration (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration \int).

La variable f est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de l'expression de f .

$$2. \int_0^x f(t) dt$$

(i) Il s'agit d'un réel.

(ii) La variable t est muette car c'est la variable d'intégration (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration \int).

Les variables f et x sont libres (elles ne sont sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra de l'expression de f et du réel x .

$$3. \int_0^x t e^t dt$$

Notons qu'on se place ici exactement dans le cadre de la question 2. pour une expression particulière de f .

(i) Il s'agit d'un réel.

(ii) La variable t est muette car c'est la variable d'intégration (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration \int).

La variable x est libre (elles n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de la variable x .

$$4. \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

(i) Il s'agit d'un réel.

(ii) La variable x est muette car c'est la variable d'intégration (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration \int).

La variable n est libre (elles n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de la variable n .

$$5. \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$$

(i) Il s'agit d'un réel.

(ii) La variable t est muette car c'est la variable d'intégration (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration \int).

La variable x est libre (elles n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de la variable x .

$$6. \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$$

(i) Il s'agit d'un réel.

(ii) La variable t est muette car c'est la variable d'intégration (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration \int).

La variable x est libre (elles n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de la variable x .

$$7. \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$$

(i) Il s'agit d'un réel.

(ii) La variable t est muette car c'est la variable d'intégration (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration \int).

La variable x est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de la variable x .

$$8. x \mapsto \ln(x) + \sqrt{x}$$

(i) Il s'agit d'une fonction réelle d'une variable réelle.

(ii) La variable x est muette car c'est la variable de définition de la fonction (une fonction est un mécanisme d'association : à chaque valeur de x est associée une image par la fonction).

On a ici affaire à une fonction dont l'évaluation en un réel donné ne dépend d'aucune variable.

$$9. (x, y) \mapsto (2x + 3y, x - y),$$

(i) Il s'agit d'une fonction d'un couple de réels et à valeurs dans \mathbb{R}^2 .

(ii) Les variables x et y sont muettes car ce sont les variables de définition de la fonction (une fonction est un mécanisme d'association : à chaque valeur du couple (x, y) est associée une image par la fonction).

On a ici affaire à une fonction dont l'évaluation en un couple de réels donné ne dépend d'aucune variable.

$$10. f : t \mapsto e^{-t}$$

(i) Il s'agit d'une fonction réelle d'une variable réelle.

(ii) La variable t est muette car c'est la variable de définition de la fonction (une fonction est un mécanisme d'association : à chaque valeur de t est associée une image par la fonction).

La variable f est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni symbole mathématique).

On a ici affaire à une fonction dont l'évaluation en un réel donné dépend seulement de l'expression de f .

$$11. f : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}$$

(i) Il s'agit d'une fonction réelle d'une variable réelle.

(ii) La variable t est muette car c'est la variable de définition de la fonction (une fonction est un mécanisme d'association : à chaque valeur de t est associée une image par la fonction).

La variable λ est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

On a ici affaire à une fonction dont l'évaluation en un réel donné dépend de l'expression de f et de la variable λ .

Commentaire

Comme l'évaluation de la fonction f dépend de la variable λ , il est d'usage, et plus rigoureux, de signifier cette dépendance en indexant f par λ . On note alors :

$$f_\lambda : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}$$

On remarque alors que la fonction de la question précédente n'est autre que f_1 .

12. $f(x)$

- (i) Il s'agit d'un réel (et non pas d'une fonction!).
- (ii) Les variables f et x sont libres (elles ne sont sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

On a ici affaire à l'évaluation d'une fonction en un point x .
Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra de l'expression de f et de la variable x .

13. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

- (i) Il s'agit d'un sous-ensemble de \mathbb{R} .
- (ii) La variable x est muette (on s'intéresse ici à tous les réels x vérifiant une condition donnée).

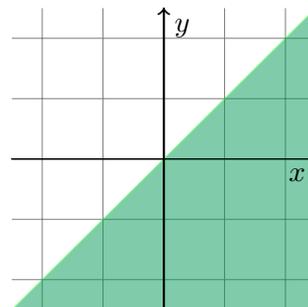
On a ici affaire à un ensemble qui ne dépend d'aucune variable.

Commentaire

Notons que cette conclusion est bien rassurante puisque l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ n'est autre que l'ensemble \mathbb{R}_+ (ou $[0, +\infty[$), notations qui ne font pas apparaître de dépendance en une variable x .

14. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}$

- (i) Il s'agit d'un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 (tracé ci-contre).
- (ii) Les variables x et y sont muettes (on s'intéresse ici à tous les réels x et y vérifiant une condition donnée).



On a ici affaire à un ensemble qui ne dépend d'aucune variable.

15. $[1, B]$

- (i) Il s'agit d'un sous-ensemble de \mathbb{R} .
- (ii) La variable B est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

On a ici affaire à un ensemble qui dépend seulement de la variable B .

$$16. \sum_{i=0}^n i^3$$

(i) Il s'agit d'un réel.

(ii) La variable i est muette car c'est la variable de sommation (elle est donc sous la portée d'un symbole de sommation \sum).

La variable n est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de la variable n .

$$17. \sum_{i=j}^n i^3$$

(i) Il s'agit d'un réel.

(ii) La variable i est muette car c'est la variable de sommation (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration \sum).

Les variables n et j sont libres (elles ne sont sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement des variables n et j .

$$18. \sum_{i=j}^n (i+j)^3$$

(i) Il s'agit d'un réel.

(ii) La variable i est muette car c'est la variable de sommation (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration \sum).

Les variables n et j sont libres (elles ne sont sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement des variables n et j .

$$19. \sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^n (i+j)^3$$

(i) Il s'agit d'un réel.

(ii) Dans la somme $\sum_{i=j}^n (i+j)^3$, seule la variable i est muette car c'est la variable de sommation.

Les variables n et j sont libres. Ainsi, le résultat de cette somme ne dépendra que de n et j .

On peut donc noter $R(n, j) = \sum_{i=j}^n (i+j)^3$.

Dans la somme $\sum_{j=0}^n R(n, j) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^n (i+j)^3$, la variable j est muette car c'est la variable de sommation et la variable n est libre.

Finalement, une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de la variable n .

$$20. \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$$

(i) Il s'agit d'une proposition quantifiée universellement.

(ii) La variable n est muette car elle est sous la portée d'un quantificateur.

La valeur de vérité de cette proposition mathématique ne dépend d'aucune variable.

21. $\forall y \in]0, +\infty[, \exists x \in \mathbb{R}, y = e^x$

- (i) Il s'agit d'une proposition quantifiée universellement.
- (ii) Les variables y et x sont muettes car elles sont sous la portée d'un quantificateur. La variable e est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique). C'est la variable généralement utilisée pour désigner $\exp(1)$.

La valeur de vérité de cette proposition mathématique dépend seulement de la variable e .

22. $\exists k \in \mathbb{Z}, k \leq \pi < k + 1$

- (i) Il s'agit d'une proposition quantifiée existentiellement.
- (ii) La variable k est muette car elle est sous la portée d'un quantificateur. La variable π est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique). C'est la variable généralement utilisée pour désigner la constante pi .

La valeur de vérité de cette proposition mathématique ne dépend que de la variable π .

23. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{Z}, k \leq x < k + 1,$

- (i) Il s'agit d'une proposition quantifiée universellement.
- (ii) Les variables x et k sont muettes car elles sont sous la portée d'un quantificateur.

La valeur de vérité de cette proposition mathématique ne dépend d'aucune variable.

24. u_n

- (i) Il s'agit d'un réel (et non pas d'une suite!).
- (ii) La variable n est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

Le résultat dépend seulement du rang n considéré.

25. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- (i) Il s'agit d'une suite.
- (ii) La variable n est muette (on considère ici la valeur de la suite u à tous les rangs n entiers).

La suite u (autre notation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$) ne dépend d'aucune variable.

26. $\sum_{n \geq 3} u_n$

- (i) Il s'agit d'une série. Autrement dit c'est la suite des sommes partielles (souvent notée (S_n)) d'une suite (u_n) .
- (ii) La variable n est muette car c'est la variable de sommation (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration \sum).

Cette série ne dépend d'aucune variable.

$$27. \sum_{n=3}^{+\infty} u_n$$

- (i) Si la série $\sum_{n \geq 3} u_n$ est convergente (dans le cas contraire, l'objet considéré dans cette question n'est pas défini), la notation $\sum_{n=3}^{+\infty} u_n$ désigne la somme de cette série. Il s'agit alors d'un réel.
- (ii) La variable n est muette car c'est la variable de sommation (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration \sum).

Cette somme ne dépend d'aucune variable.

$$28. u_n \geq \ln(2)$$

- (i) Il s'agit d'une proposition mathématique qui n'est pas quantifiée.
- (ii) La variable n est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

La valeur de vérité de cette proposition mathématique dépend seulement du rang n où elle est évaluée.

$$29. \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \ln(2)$$

- (i) Il s'agit d'une proposition mathématique quantifiée universellement.
- (ii) La variable n est muette car elle est sous la portée d'un quantificateur.

La valeur de vérité de cette proposition mathématique ne dépend d'aucune variable.

$$30. \mathcal{P}(n)$$

- (i) Il s'agit d'une proposition mathématique qui n'est pas quantifiée.
- (ii) Les variables \mathcal{P} et n sont libres (elles ne sont sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

La valeur de vérité de cette proposition mathématique dépend de la proposition \mathcal{P} ainsi que du rang n où elle est évaluée.

$$31. \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$$

- (i) Il s'agit d'une proposition mathématique quantifiée universellement.
- (ii) La variable n est muette car elle est sous la portée d'un quantificateur. La variable \mathcal{P} est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

La valeur de vérité de cette proposition mathématique dépend seulement de la proposition \mathcal{P} considérée.

□

b) Calculer la somme $\sum_{k=0}^i \sum_{j=0}^k 2^i 3^j$.

De quelles variables dépend l'expression obtenue ? Était-ce prévisible ?

Démonstration.

• Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^i \sum_{j=0}^k 2^i 3^j &= \sum_{k=0}^i 2^i \sum_{j=0}^k 3^j && \text{(car } 2^i \text{ ne dépend pas de la} \\
 & && \text{variable de sommation } j) \\
 &= 2^i \sum_{k=0}^i \sum_{j=0}^k 3^j && \text{(car } 2^i \text{ ne dépend pas de la} \\
 & && \text{variable de sommation } k) \\
 &= 2^i \sum_{k=0}^i \frac{1 - 3^{k+1}}{1 - 3} && \text{(car } 3 \neq 1) \\
 &= \frac{2^i}{-2} \left(\sum_{k=0}^i 1 - \sum_{k=0}^i 3^{k+1} \right) \\
 &= -2^{i-1} \left((i+1) - 3 \sum_{k=0}^i 3^k \right) \\
 &= -2^{i-1} \left(i+1 - 3 \frac{1 - 3^{i+1}}{1 - 3} \right) \\
 &= -2^{i-1} \left(i+1 + \frac{3}{2}(1 - 3^{i+1}) \right)
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^i \sum_{j=0}^k 2^i 3^j &= -2^{i-1} \left(i+1 + \frac{3}{2} - \frac{3^{i+2}}{2} \right) \\
 &= -2^{i-1} \left(i + \frac{5}{2} - \frac{3^{i+2}}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Finalement : $\sum_{k=0}^i \sum_{j=0}^k 2^i 3^j = 2^{i-1} \left(\frac{3^{i+2}}{2} - i - \frac{5}{2} \right)$.

- On constate que l'expression obtenue ne dépend que de la variable i .
- Cela était prévisible :
 - × les variables j et k sont des variables muettes, car ce sont des variables de sommation (chacune sous la portée du symbole \sum)
 - × la variable i est libre, car elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni symbole mathématique.

Il est donc prévisible que le résultat ne dépende que de la variable i .

□

II. Séance 1 : déterminer la régularité d'une fonction

- Il faut savoir démontrer qu'une fonction est continue, dérivable, de classe \mathcal{C}^1 , de classe \mathcal{C}^2 , ..., de classe \mathcal{C}^∞ sur un ensemble E . La manière de procéder est toujours la même.

La fonction f est [type de régularité] sur E car elle est (au choix) :

1) la somme $f = f_1 + f_2$ où :

× f_1 est [type de régularité] sur E .

× f_2 est [type de régularité] sur E .

2) le produit $f = f_1 \times f_2$ où :

× f_1 est [type de régularité] sur E .

× f_2 est [type de régularité] sur E .

3) l'inverse $f = \frac{1}{f_1}$ où :

× f_1 est [type de régularité] sur E .

× f_1 ne s'annule pas sur E .

4) le quotient $f = \frac{f_1}{f_2}$ où :

× f_1 est [type de régularité] sur E .

× f_2 :

– est [type de régularité] sur E .

– ne s'annule pas sur E .

5) la composée $f = f_2 \circ f_1$ où :

× f_1 est :

– [type de régularité] sur E .

– telle que $f_1(E) \subset F$

× f_2 est [type de régularité] sur F .

où l'on remplace chaque occurrence de [type de régularité] par continue, ou dérivable ou de classe \mathcal{C}^1 ou de classe \mathcal{C}^2 , ..., ou de classe \mathcal{C}^∞ .

- Pour démontrer qu'une fonction f est [type de régularité] sur E , il s'agit donc de montrer que des sous-fonctions f_1 et f_2 sont [type de régularité] sur E .

Pour démontrer que f_1 et f_2 sont [type de régularité] sur E , on peut avoir à les décomposer elles-mêmes à l'aide de sous-fonctions et ainsi de suite.

Ce type de démonstration nécessite des fonctions particulières dont on sait qu'elles sont [type de régularité] sur E . Ces briques de base sont :

× les fonctions polynomiales qui sont [type de régularité] sur n'importe quel ensemble E .

× les fonctions usuelles (\ln , \exp , $\sqrt{\cdot}$, $(\cdot)^n$, $(\cdot)^\alpha$, ...) dont on connaît la régularité.

- Il n'y a aucune difficulté à démontrer qu'une fonction est [type de régularité] sur E .
Il suffit d'appliquer la méthode ! De ce fait, les erreurs d'application de la méthode seront lourdement sanctionnées.
- Lorsqu'on étudie la régularité d'une fonction définie par cas (comme la fonction $|\cdot|$ par exemple), on est amené à étudier la régularité de la fonction sur chacun des ensembles ouverts (ici $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$) et enfin à étudier la régularité en les points restants (ici 0) en étudiant la régularité à gauche et à droite de ces points.

- Une fonction (définie en x_0) est continue en un point x_0 si elle admet une limite **finie** en ce point. On rappelle que la notion de limite est une notion locale : on s'intéresse au comportement de la fonction au voisinage du point x_0 c'est à dire dans un intervalle ouvert contenant x_0 (par exemple de type $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ où $\delta > 0$). Plusieurs cas se présentent alors :

× si la fonction est définie par cas.

Une fonction est dite définie par cas si elle est définie sur une réunion d'intervalles réels et la restriction à chacun de ces intervalles est donnée par une expression différente.

Les deux fonctions suivantes sont par exemple définies par cas :

$$\begin{array}{lcl}
 |\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & & f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\
 x \mapsto \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} & & x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}
 \end{array}$$

Si une fonction f est définie par cas au voisinage de x_0 , alors on calcule la limite à droite de x_0 , la limite à gauche de x_0 et on vérifie si ces valeurs sont égales à $f(x_0)$.

Exemple : on considère la fonction $f : x \mapsto |x|$ et $x_0 = 0$.

La fonction f est bien définie à gauche et à droite de 0 (sur $] - 1, 1[$ par exemple).

De plus : $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$ et enfin $f(0) = |0| = 0$.

La fonction f est bien continue en 0.

× si la fonction n'est pas définie par cas.

Une fonction n'est pas définie par cas si son expression est la même sur l'ensemble de son intervalle de définition. C'est le cas par exemple des deux fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lcl}
 f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & & g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\
 x \mapsto e^{x^3-x} & & x \mapsto \sqrt{x(1-x)}
 \end{array}$$

Si une fonction f n'est pas définie par cas au voisinage de x_0 , un seul calcul de limite est suffisant.

Exemple : on considère la fonction $f : x \mapsto e^{x^3-x}$ et $x_0 = 0$.

La fonction f est bien définie de la même manière à gauche et à droite de 0 (sur $] - 1, 1[$ par exemple). Enfin, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^0 = 1$.

La fonction f est bien continue en 0.

× si la fonction f n'est définie qu'à droite (resp. gauche) de x_0 , on s'intéresse seulement au comportement à droite (resp. gauche) de x_0 .

Exemple : on considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $x_0 = 0$.

La fonction f est bien définie à droite de 0 (sur $[0, 1[$ par exemple).

De plus : $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$.

La fonction f est bien continue en 0.

Dans le cas où f n'est pas définie au point x_0 , on peut prolonger f par continuité au point x_0 si f admet une limite finie en x_0 .

- On retiendra du point précédent que pour déterminer la régularité d'une fonction f , on s'intéresse au comportement de f à proximité du point x_0 . La donnée de f seulement au point x_0 n'est pas suffisante. En conséquence, l'horreur :

~~$f \text{ constante en } x_0 \Rightarrow f \text{ dérivable en } x_0$~~

vaudra des points négatifs si rencontrée dans une copie. Au passage, la formulation « f constante en le point x_0 » est hasardeuse. Une fonction f définie en x_0 ne prend évidemment qu'une valeur en x_0 (par définition d'une fonction).

- Si une fonction est dérivable sur E alors elle est continue sur E . L'horreur :

$$\del{f \text{ continue sur } E \Rightarrow f \text{ dérivable sur } E}$$

vaudra des points négatifs si rencontrée. Au passage, rien ne sert de parler de « fonction continue, dérivable sur E ». On parlera simplement de « fonction dérivable sur E » (la continuité s'en déduit).

- Une fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur E si elle dérivable et que sa **dérivée** f' est de classe \mathcal{C}^0 sur E . De manière générale, une fonction est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur E (pour $n \in \mathbb{N}^*$) si elle dérivable et que sa **dérivée** f' est de classe \mathcal{C}^n sur E .

Exercice 3

1. Étudier la continuité des fonctions suivantes sur l'ensemble E .

Ces fonctions sont-elles prolongeables par continuité au bord de l'ensemble E ?

a) $f : x \mapsto x \ln(x) - x$ et $E =]0, +\infty[$

Démonstration.

La fonction f est de classe \mathcal{C}^0 sur $]0, +\infty[$ car elle est la somme $f = f_1 + f_2$ où :

× $f_1 : x \mapsto x \ln(x)$ est de classe \mathcal{C}^0 sur $]0, +\infty[$ car elle est le produit $f_1 = g_1 \times g_2$ où :

– $g_1 : x \mapsto x$ est de classe \mathcal{C}^0 sur $]0, +\infty[$ car polynomiale.

– $g_2 : x \mapsto \ln(x)$ est de classe \mathcal{C}^0 sur $]0, +\infty[$ (fonction usuelle).

× $f_2 : x \mapsto -x$ est de classe \mathcal{C}^0 sur $]0, +\infty[$ car polynomiale.

La fonction $f : x \mapsto x \ln(x) - x$ est de classe \mathcal{C}^0 sur $]0, +\infty[$.

On remarque alors :

× $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ puisque $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$.

Ainsi, on peut prolonger la fonction f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. □

b) $f : x \mapsto \frac{1}{(x+1)^3}$ et $E =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

Démonstration.

La fonction f est de classe \mathcal{C}^0 sur $] -\infty, -1[\cup] -1, +\infty[$ car elle est l'inverse $f = \frac{1}{f_1}$ où la fonction $f_1 : x \mapsto (x+1)^3$ est :

– de classe \mathcal{C}^0 sur $] -\infty, -1[\cup] -1, +\infty[$ car polynomiale.

– NE S'ANNULE PAS sur $] -\infty, -1[\cup] -1, +\infty[$.

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{(x+1)^3}$ est de classe \mathcal{C}^0 sur $] -\infty, -1[\cup] -1, +\infty[$.

On remarque alors :

× $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$ puisque $\lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1)^3 = 0^-$.

× $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ puisque $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1)^3 = 0^+$.

Ainsi, on ne peut pas prolonger la fonction f par continuité en -1 . □

c) $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(x) + 1}$ et $E =]0, e^{-1}[\cup]e^{-1}, +\infty[$

Démonstration.

La fonction f est de classe \mathcal{C}^0 sur $]0, e^{-1}[\cup]e^{-1}, +\infty[$ car elle est le quotient $f = \frac{f_1}{f_2}$ où :

× $f_1 : x \mapsto x$ est de classe \mathcal{C}^0 sur $]0, e^{-1}[\cup]e^{-1}, +\infty[$ car polynomiale.

× $f_2 : x \mapsto \ln(x) + 1$:

– est de classe \mathcal{C}^0 sur $]0, e^{-1}[\cup]e^{-1}, +\infty[$.

– NE S'ANNULE PAS sur $]0, e^{-1}[\cup]e^{-1}, +\infty[$.

La fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(x) + 1}$ est de classe \mathcal{C}^0 sur $]0, e^{-1}[\cup]e^{-1}, +\infty[$.

On remarque alors :

× $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ puisque $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) + 1 = -\infty$.

Ainsi, on peut prolonger la fonction f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

On remarque enfin :

× $\lim_{x \rightarrow (e^{-1})^-} f(x) = -\infty$ puisque $\lim_{x \rightarrow (e^{-1})^-} x = e^{-1} > 0$ et $\lim_{x \rightarrow (e^{-1})^-} \ln(x) + 1 = 0^-$.

× $\lim_{x \rightarrow (e^{-1})^+} f(x) = +\infty$ puisque $\lim_{x \rightarrow (e^{-1})^+} x = e^{-1} > 0$ et $\lim_{x \rightarrow (e^{-1})^+} \ln(x) + 1 = 0^+$.

Ainsi, on ne peut prolonger la fonction f par continuité en e^{-1} . □

d) $f : x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 2}{3x + 5}$ et $E =]-\infty, -\frac{5}{3}[\cup]-\frac{5}{3}, +\infty[$

Démonstration.

La fonction f est de classe \mathcal{C}^0 sur $]-\infty, -\frac{5}{3}[\cup]-\frac{5}{3}, +\infty[$ car elle est le quotient $f = \frac{f_1}{f_2}$ où :

× $f_1 : x \mapsto x^2 - 3x + 2$ est de classe \mathcal{C}^0 sur $]-\infty, -\frac{5}{3}[\cup]-\frac{5}{3}, +\infty[$ car polynomiale.

× $f_2 : x \mapsto 3x + 5$:

– est de classe \mathcal{C}^0 sur $]-\infty, -\frac{5}{3}[\cup]-\frac{5}{3}, +\infty[$.

– NE S'ANNULE PAS sur $]-\infty, -\frac{5}{3}[\cup]-\frac{5}{3}, +\infty[$.

La fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 2}{3x + 5}$ est de classe \mathcal{C}^0 sur $]-\infty, -\frac{5}{3}[\cup]-\frac{5}{3}, +\infty[$.

On remarque alors :

× $\lim_{x \rightarrow (-\frac{5}{3})^-} f(x) = -\infty$ puisque $\lim_{x \rightarrow (-\frac{5}{3})^-} x^2 - 3x + 2 = \frac{88}{9} > 0$ et $\lim_{x \rightarrow (-\frac{5}{3})^-} 3x + 5 = 0^-$.

× $\lim_{x \rightarrow (-\frac{5}{3})^+} f(x) = +\infty$ puisque $\lim_{x \rightarrow (-\frac{5}{3})^+} x^2 - 3x + 2 = \frac{88}{9} > 0$ et $\lim_{x \rightarrow (-\frac{5}{3})^+} 3x + 5 = 0^+$.

Ainsi, on ne peut pas prolonger la fonction f par continuité en $-\frac{5}{3}$. □

e) $f : x \mapsto \ln(3x^2 + 2x)$ et $E =]-\infty, -\frac{2}{3}[\cup]0, +\infty[$

Démonstration.

La fonction f est de classe \mathcal{C}^0 sur $]-\infty, -\frac{2}{3}[\cup]0, +\infty[$ car elle est la composée $f = f_2 \circ f_1$ où :

× $f_1 : x \mapsto 3x^2 + 2x = x(3x + 2)$ est :

– de classe \mathcal{C}^0 sur $]-\infty, -\frac{2}{3}[\cup]0, +\infty[$ car polynomiale.

– telle que $f_1\left(]-\infty, -\frac{2}{3}[\cup]0, +\infty[\right) \subset]0, +\infty[$

× $f_2 : x \mapsto \ln(x)$ est de classe \mathcal{C}^0 sur $]0, +\infty[$.

La fonction $f : x \mapsto \ln(3x^2 + 2x)$ est de classe \mathcal{C}^0 sur $]-\infty, -\frac{2}{3}[\cup]0, +\infty[$.

On remarque alors :

× $\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} f(x) = -\infty$ puisque $\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} 3x^2 + 2x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$.

Ainsi, on ne peut pas prolonger la fonction f par continuité en $-\frac{2}{3}$.

On remarque enfin :

× $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ puisque $\lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 + 2x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$.

Ainsi, on ne peut pas prolonger la fonction f par continuité en 0. □

f) $f : x \mapsto e^{x^3 - x}$ et $E =]-\infty, +\infty[$

Démonstration.

La fonction f est de classe \mathcal{C}^0 sur $]-\infty, +\infty[$ car elle est la composée $f = f_2 \circ f_1$ où :

× $f_1 : x \mapsto x^3 - x = x(x^2 - 1)$ est :

– de classe \mathcal{C}^0 sur $]-\infty, +\infty[$ car polynomiale.

– telle que $f_1\left(]-\infty, +\infty[\right) \subset]-\infty, +\infty[$

× $f_2 : x \mapsto e^x$ est de classe \mathcal{C}^0 sur $]-\infty, +\infty[$.

La fonction $f : x \mapsto e^{x^3 - x}$ est de classe \mathcal{C}^0 sur $]-\infty, +\infty[$. □

g) $f : x \mapsto \ln(1 + |x|)$ et $E =]-\infty, +\infty[$

Démonstration.

La fonction f est de classe \mathcal{C}^0 sur $]-\infty, +\infty[$ car elle est la composée $f = f_2 \circ f_1$ où :

× $f_1 : x \mapsto 1 + |x|$ est :

– de classe \mathcal{C}^0 sur $]-\infty, +\infty[$ (la fonction $|\cdot|$ est une fonction usuelle).

– telle que $f_1\left(]-\infty, +\infty[\right) \subset]0, +\infty[$

× $f_2 : x \mapsto \ln(x)$ est de classe \mathcal{C}^0 sur $]0, +\infty[$.

La fonction $f : x \mapsto \ln(1 + |x|)$ est de classe \mathcal{C}^0 sur $]-\infty, +\infty[$. □

2. Les fonctions précédentes sont-elles dérivables sur E ?

Sont-elles dérivables au bord de E ?

Démonstration.

a) • La fonction $f : x \mapsto x \ln(x) - x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Pour le démontrer, on remplace chaque occurrence de l'expression « de classe \mathcal{C}^0 » de la démonstration précédente par le mot « dérivable ».

• Étudions maintenant la dérivabilité de f en 0.

$$\begin{aligned} \tau_0(f)(x) &= \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{(x \ln(x) - x) - 0}{x - 0} = \frac{x (\ln(x) - 1)}{x} \\ &= \ln(x) - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty \end{aligned}$$

Ainsi, f n'est pas dérivable en 0.

b) • La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{(x+1)^3}$ est dérivable sur $] -\infty, -1[\cup] -1, +\infty[$.

Pour le démontrer, on remplace chaque occurrence de l'expression « de classe \mathcal{C}^0 » de la démonstration précédente par le mot « dérivable ».

• Étudions maintenant la dérivabilité de f en -1 .

La fonction f n'étant pas continue en -1 , elle n'est pas dérivable en -1 .

La fonction f n'est pas dérivable en -1 .

c) • La fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)+1}$ est dérivable sur $]0, e^{-1}[\cup]e^{-1}, +\infty[$.

Pour le démontrer, on remplace chaque occurrence de l'expression « de classe \mathcal{C}^0 » de la démonstration précédente par le mot « dérivable ».

• Étudions maintenant la dérivabilité de f en 0.

$$\tau_0(f)(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x}{\ln(x)+1} - 0}{x - 0} = \frac{1}{\ln(x)+1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

• Étudions enfin la dérivabilité de f en e^{-1} .

La fonction f n'étant pas continue en e^{-1} , elle n'est pas dérivable en e^{-1} .

La fonction f n'est pas dérivable en e^{-1} .

d) • La fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 2}{3x + 5}$ est dérivable sur $] -\infty, -\frac{5}{3}[\cup] -\frac{5}{3}, +\infty[$.

Pour le démontrer, on remplace chaque occurrence de l'expression « de classe \mathcal{C}^0 » de la démonstration précédente par le mot « dérivable ».

• Étudions maintenant la dérivabilité de f en $-\frac{5}{3}$.

La fonction f n'étant pas continue en $-\frac{5}{3}$, elle n'est pas dérivable en $-\frac{5}{3}$.

La fonction f n'est pas dérivable en $-\frac{5}{3}$.

- e) • La fonction $f : x \mapsto \ln(3x^2 + 2x)$ est dérivable sur $] - \infty, -\frac{2}{3}[\cup]0, +\infty[$.
 Pour le démontrer, on remplace chaque occurrence de l'expression « de classe \mathcal{C}^0 » de la démonstration précédente par le mot « dérivable ».
- Étudions maintenant la dérivabilité de f en $-\frac{2}{3}$.
 La fonction f n'étant pas continue en $-\frac{2}{3}$, elle n'est pas dérivable en $-\frac{2}{3}$.

La fonction f n'est pas dérivable en $-\frac{2}{3}$.

- Étudions maintenant la dérivabilité de f en 0.
 La fonction f n'étant pas continue en 0, elle n'est pas dérivable en 0.

La fonction f n'est pas dérivable en 0.

- f) • La fonction $f : x \mapsto e^{x^3-x}$ est dérivable sur $] - \infty, +\infty[$.
 Pour le démontrer, on remplace chaque occurrence de l'expression « de classe \mathcal{C}^0 » de la démonstration précédente par le mot « dérivable ».

- g) • La fonction $f : x \mapsto \ln(1 + |x|)$ **N'EST PAS** dérivable sur $] - \infty, +\infty[$.
 On ne peut remplacer chaque occurrence de l'expression « de classe \mathcal{C}^0 » de la démonstration précédente par le mot « dérivable » car la fonction $f_1 : x \mapsto 1 + |x|$ **N'EST PAS** dérivable sur $] - \infty, +\infty[$. Plus précisément, elle n'est pas dérivable en 0.

- Par contre, on peut démontrer que la fonction f est dérivable sur $] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
 La fonction f est dérivable sur $] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[$ car elle est la composée $f = f_2 \circ f_1$ où :

- × $f_1 : x \mapsto 1 + |x|$ est :
 - dérivable sur $] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[$ (la fonction $|\cdot|$ est une fonction usuelle),
 - telle que $f_1\left(] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[\right) \subset]0, +\infty[$.
- × $f_2 : x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

La fonction $f : x \mapsto \ln(1 + |x|)$ est dérivable sur $] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

- Étudions maintenant la dérivabilité de f en 0.

$$\begin{aligned} \tau_0(f)(x) &= \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1 + |x|)}{x} \\ &= \frac{\ln(1 + |x|)}{|x|} \frac{|x|}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1 \end{aligned}$$

Ainsi, f est dérivable **à droite** en 0 et $f'_d(0) = 1$.

De même, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \tau_0(f)(x) = -1$.

Ainsi, f est dérivable **à gauche** en 0 et $f'_g(0) = -1$.

On en déduit que f n'est pas dérivable en 0.

□

3. Les fonctions précédentes sont-elles de classe \mathcal{C}^1 sur E ? Sont-elles de classe \mathcal{C}^2 sur E ?
 Sont-elles de classe \mathcal{C}^∞ sur E ?

Démonstration.

Pour démontrer que les fonctions sont de classe \mathcal{C}^1 (resp. $\mathcal{C}^2, \mathcal{C}^\infty$) sur E , on reprend le raisonnement de la question en remplaçant (si cela est possible) chaque occurrence de l'expression « de classe \mathcal{C}^0 » par l'expression « de classe \mathcal{C}^1 (resp. $\mathcal{C}^2, \mathcal{C}^\infty$) ».

Les fonctions des questions **a)** à **f)** sont toutes \mathcal{C}^∞ sur l'ensemble E . La fonction $x \mapsto \ln(1 + |x|)$ est elle \mathcal{C}^∞ sur $] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[$. □

Exercice 4

On considère la fonction :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 1 \\ \frac{\ln(x)}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est continue par morceaux sur $[-4, 4]$.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $[-4, -1[$ car est nulle sur cet intervalle.
- La fonction f est continue sur $] -1, 1[$ car polynomiale sur cet intervalle.
- La fonction f est continue sur $]1, 4[$ car est le quotient $\frac{g_1}{g_2}$ où :
 - × $g_1 : x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $]1, 4[$,
 - × $g_2 : x \mapsto x$:
 - est continue (car polynomiale) sur $]1, 4[$.
 - ne s'annule pas sur $]1, 4[$.
- De plus, les limites à gauche et à droite en les points -1 et 1 sont toutes finies :
 - × $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0,$
 - × $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1,$
 - × $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1,$
 - × $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0.$

On en déduit que la fonction f est \mathcal{C}_m^0 (continue par morceaux) sur $[-4, 4]$.

Commentaire

- Rappelons la définition :

Une fonction f est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$ telle que pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

- × f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$,
- × f admet une limite à droite finie en a_i ,
- × f admet une limite à gauche finie en a_{i+1} .

On note alors \tilde{f}_i le prolongement par continuité de f sur $[a_i, a_{i+1}]$.

En notant F_i une primitive de \tilde{f}_i sur $[a_i, a_{i+1}]$, on peut alors définir **l'intégrale de a à b** de la fonction f :

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} \tilde{f}_i(t) dt = \sum_{i=1}^n (F_i(a_i) - F_i(a_{i-1}))$$

C'est l'objet de la question suivante.

- Une fonction f est continue par morceaux sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur tout segment $[a, b]$ ($a < b$) de I .
- On aurait pu démontrer ici que f est continue par morceaux sur $] -\infty, +\infty[$.

□

2. Justifier l'existence et calculer la valeur de l'intégrale suivante : $\int_{-4}^4 f(u) du$.

Démonstration.

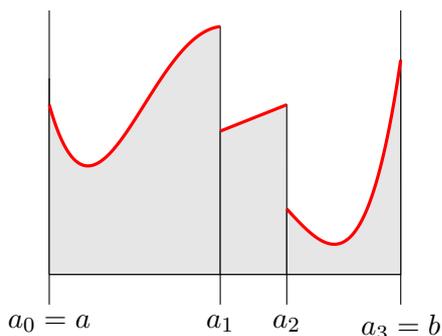
- La fonction f est C_m^0 sur $[-4, 4]$, donc l'intégrale $\int_{-4}^4 f(x) dx$ est bien définie.
- Par définition :

$$\begin{aligned} \int_{-4}^4 f(x) dx &= \int_{-4}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx \\ &= \int_{-4}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^1 x dx + \int_1^4 \frac{\ln(x)}{x} dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{-1} + \left[\frac{(\ln(x))^2}{2} \right]_1^4 && \text{(on reconnaît la forme classique } u' \times u^\alpha \text{ avec } u = \ln(x) \text{ et } \alpha = 1) \\ &= \frac{1}{2} [x^2]_{-1}^{-1} + \frac{1}{2} [(\ln(x))^2]_1^4 \\ &= \frac{1}{2} (1^2 - (-1)^2) + \frac{1}{2} ((\ln(4))^2 - (\ln(1))^2) \\ &= \frac{1}{2} (2 \ln(2))^2 = \frac{4(\ln(2))^2}{2} = 2(\ln(2))^2 \end{aligned}$$

$$\int_{-4}^4 f(x) dx = 2(\ln(2))^2$$

Commentaire

- La fonction f N'EST PAS continue sur $[-4, 4]$ car elle n'est pas continue en -1 (ni en 1). Elle est par contre continue par morceaux sur $[-4, 4]$ ce qui suffit pour démontrer que l'intégrale $\int_{-4}^4 f(t) dt$ est bien définie. On la calcule en appliquant la **définition** d'intégrale dans le cas de telles fonctions (cf remarque précédente) : il s'agit de calculer les intégrales sur chaque « intervalle de continuité » $[a_i, a_{i+1}]$ (c'est la fonction \tilde{f}_i qui est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$).
- Même si le calcul se fait en découpant sur des intervalles, ce n'est pas pour autant une application du théorème de Chasles. Le théorème de Chasles s'applique **après** avoir démontré que l'intégrale existait (cf cours) et ne sert donc pas à la définir.
- On place ci-dessous une représentation graphique permettant de comprendre comment est définie l'intégrale sur un segment $[a, b]$ d'une fonction f qui est C_m^0 sur $[a, b]$.



La fonction f est continue par morceaux sur $[a_0, a_3]$ car elle vérifie les propriétés suivantes.

- La fonction f est continue sur $[a_0, a_1[$.
- La fonction f est continue sur $]a_1, a_2[$.
- La fonction f est continue sur $]a_2, a_3]$.
- La fonction f admet des limites finies (éventuellement non égales) à gauche et à droite de a_1 et a_2 .

□

III. Séance 2 : équations différentielles

Commentaire

On commence par rappeler la méthode de résolution des EDL.

- 1) Résolution de l'équation homogène associée. On note \mathcal{S}_H l'ensemble de ses solutions.
- 2) Recherche d'une solution particulière de l'équation complète. On note cette fonction g .
Pour cette étape, on pourra :
 - a) vérifier rapidement si certaines fonctions constantes sont solution.
 - b) chercher cette solution particulière sous la forme d'une fonction polynomiale **si le 2nd membre est polynomial**,
 - c) appliquer la méthode de variation de la constante **dans le cas d'une EDL d'ordre 1**.
- 3) Obtention des solutions de l'EDL complète :

$$\mathcal{S} = \{f + g \mid f \in \mathcal{S}_H\}$$

III.1. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 5

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes d'inconnues $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

1. $(E_1) y' - 5y = 2$
2. $(E_2) y' - 5y = x^2$
3. $(E_3) y' - 5y = 5x^2 - 14$
4. $(E_4) y' - 3y = e^{-3x} + 6$
5. $(E_5) y' - 2y = \frac{1}{(e^{-2t} + 3)^2}$
6. $(E_6) y' + y = t^k e^{-t}$ où $k \in \mathbb{N}$

Démonstration.

1. Résolvons (E_1) .

- On commence par résoudre son équation homogène associée $(H_1) y' - 5y = 0$.
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :

$$\{x \mapsto \lambda e^{5x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E_1) .
Comme le second membre de (E_1) est une constante, on cherche une fonction constante solution de (E_1) .
Soit $c \in \mathbb{R}$. On note alors $g : x \mapsto c$. La fonction g est bien de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} g \text{ est solution de } (E_1) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) - 5g(x) = 2 \\ &\Leftrightarrow -5c = 2 \\ &\Leftrightarrow c = -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $g_1 : x \mapsto -\frac{2}{5}$ est une solution particulière de (E_1) .

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E_1) est : $\{x \mapsto \lambda e^{5x} - \frac{2}{5} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

2. Résolvons (E_2) .

- On commence par résoudre son équation homogène associée (H_2) $y' - 5y = 0$.
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :

$$\{x \mapsto \lambda e^{5x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E_2) .
Comme le second membre de (E_2) est une fonction polynomiale de degré 2, on cherche une fonction polynomiale de degré 2 solution de (E_2) .
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On note alors $g : x \mapsto ax^2 + bx + c$. La fonction g est bien de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} g \text{ est solution de } (E_2) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) - 5g(x) = x^2 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, 2ax + b - 5(ax^2 + bx + c) = x^2 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, -5ax^2 + (2a - 5b)x + (b - 5c) = x^2 \\ &\iff \begin{cases} -5a &= 1 \\ 2a - 5b &= 0 \\ b - 5c &= 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_2 \leftarrow 5L_2 + 2L_1}{\iff} \begin{cases} -5a &= 1 \\ -25b &= 2 \\ b - 5c &= 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow 25L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} -5a &= 1 \\ -25b &= 2 \\ -125c &= 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a &= -\frac{1}{5} \\ b &= -\frac{2}{25} \\ c &= -\frac{2}{125} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $g_2 : x \mapsto -\frac{1}{5} \left(x^2 + \frac{2}{5} x + \frac{2}{25} \right)$ est une solution particulière de (E_2) .

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E_2) est :

$$\{x \mapsto \lambda e^{5x} - \frac{1}{5} \left(x^2 + \frac{2}{5} x + \frac{2}{25} \right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

3. Résolvons (E_3) .

- On commence par résoudre son équation homogène associée (H_3) $y' - 5y = 0$.
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :

$$\{x \mapsto \lambda e^{5x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E_3) . On remarque :
 - × l'équation homogène associée à (E_3) est la même que celles associées aux équations (E_1) et (E_2) ,
 - × le second membre de (E_3) est une combinaison linéaire des seconds membres de (E_1) et (E_2) .
 Par principe de superposition, la fonction $g_3 = -7g_1 + 5g_2$ est une solution particulière de (E_3) .

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E_1) est :

$$\{x \mapsto \lambda e^{5x} - \left(x^2 + \frac{2}{5} x + \frac{2}{25} \right) + \frac{14}{5} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

4. Résolvons (E_4) .

- On commence par résoudre son équation homogène associée (H_4) $y' - 3y = 0$.

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :

$$\{x \mapsto \lambda e^{3x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E_4) .

Comme le second membre de (E_4) est une somme, on cherche :

× une solution particulière h_4 de (E'_4) $y' - 3y = e^{3x}$,

× une solution particulière \tilde{h}_4 de (E''_4) $y' - 3y = 6$.

Par principe de superposition, la fonction $g_4 = h_4 + \tilde{h}_4$ sera une solution particulière de (E_4) .

× Cherchons une solution particulière de (E'_4) .

Comme le second membre de (E'_4) est $x \mapsto e^{-3x}$, on cherche une fonction de la forme $x \mapsto \lambda e^{-3x}$ solution de (E'_4) .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note alors $h : x \mapsto \lambda e^{-3x}$. La fonction h est bien de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} h \text{ est solution de } (E'_4) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, h'(x) - 3h(x) = e^{-3x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -3\lambda e^{-3x} - 3\lambda e^{-3x} = e^{-3x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (-6\lambda - 1)e^{-3x} = 0 \\ &\Leftrightarrow -6\lambda - 1 = 0 && (\text{car } \forall x \in \mathbb{R}, e^{-3x} \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $h_4 : x \mapsto -\frac{1}{6} e^{-3x}$ est une solution particulière de (E'_4) .

× Cherchons une solution particulière de (E''_4) .

Comme le second membre de (E''_4) est une constante, on cherche une fonction constante solution de (E''_4) .

Soit $c \in \mathbb{R}$. On note alors $h : x \mapsto c$. La fonction h est bien de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} h \text{ est solution de } (E''_4) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, h'(x) - 3h(x) = 6 \\ &\Leftrightarrow -3c = 6 \\ &\Leftrightarrow c = -2 \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $\tilde{h}_4 : x \mapsto -2$ est une solution particulière de (E''_4) .

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E_4) est :

$$\{x \mapsto \lambda e^{3x} - \frac{1}{6} e^{-3x} - 2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

5. Résolvons (E_5) .

- On commence par résoudre son équation homogène associée (H_5) $y' - 2y = 0$.

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :

$$\{t \mapsto \lambda e^{2t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E_5) .
Comme le second membre de (E_5) ne semble pas avoir une forme simple (et que (E_5) est une EDL d'ordre 1), on applique la méthode de variation de la constante. Autrement dit, on cherche une solution particulière de (E_5) sous la forme $t \mapsto \lambda(t)e^{2t}$.
Soit $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note alors $g : x \mapsto \lambda(t)e^{2t}$. La fonction g est bien de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} g \text{ est solution de } (E_5) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, g'(t) - 2g(t) = \frac{1}{(e^{-2t} + 3)^2} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, (\lambda'(t)e^{2t} + \cancel{\lambda(t) \times 2e^{2t}}) - \cancel{2\lambda(t)e^{2t}} = \frac{1}{(e^{-2t} + 3)^2} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \lambda'(t) = \frac{e^{-2t}}{(e^{-2t} + 3)^2} \end{aligned}$$

La fonction λ cherchée peut donc être choisie parmi les primitives de $t \mapsto \frac{e^{-2t}}{(e^{-2t} + 3)^2}$.

La fonction $\lambda : t \mapsto \frac{1}{2} \frac{1}{e^{-2t} + 3}$ convient.

Ainsi, la fonction $g_5 : x \mapsto \frac{1}{2} \frac{1}{(e^{-2t} + 3)} e^{2t}$ est une solution particulière de (E_5) .

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E_5) est :

$$\left\{ x \mapsto \lambda e^{2x} + \frac{e^{2t}}{2(e^{-2t} + 3)} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

6. Résolvons (E_6) .

- On commence par résoudre son équation homogène associée (H_6) $y' + y = 0$.
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :

$$\{t \mapsto \lambda e^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E_1) .
Comme le second membre de (E_6) ne semble pas avoir une forme simple (et que (E_6) est une EDL d'ordre 1), on applique la méthode de variation de la constante. Autrement dit, on cherche une solution particulière de (E_6) sous la forme $t \mapsto \lambda(t)e^{-t}$.
Soit $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note alors $g : x \mapsto \lambda(t)e^{-t}$. La fonction g est bien de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} g \text{ est solution de } (E_6) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, g'(t) + g(t) = t^k e^{-t} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, (\lambda'(t)e^{-t} + \cancel{\lambda(t) \times (-e^{-t})}) + \cancel{\lambda(t)e^{-t}} = t^k e^{-t} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \lambda'(t) = t^k \end{aligned}$$

La fonction λ cherchée peut donc être choisie parmi les primitives de $t \mapsto t^k$.

La fonction $\lambda : t \mapsto \frac{1}{k+1} t^{k+1}$ convient.

Ainsi, la fonction $g_5 : x \mapsto \frac{1}{k+1} t^{k+1} e^{-t}$ est une solution particulière de (E_6) .

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E_6) est :

$$\left\{ t \mapsto \lambda e^{-t} + \frac{1}{k+1} t^{k+1} e^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

III.2. Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Exercice 6

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes d'inconnues $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

1. $(E_1) \ y'' - 3\sqrt{2}y' + 4y = 8$
2. $(E_2) \ y'' + 6y' + 9y = 7$
3. $(E_3) \ y'' - y = 3x^2$
4. $(E_4) \ 2y'' - 3y' + y = x e^{-x}$
5. $(E_5) \ 2y'' - 3y' + y = x e^x$
6. $(E_6) \ y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + 4$
7. $(E_7) \ y'' + y' + y = \sin(2x)$

Démonstration.

1) Résolvons (E_1) .

- On commence par résoudre son équation homogène associée $(H_1) \ y'' - 3\sqrt{2}y' + 4y = 0$.
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On détermine donc les racines de son polynôme caractéristique $Q(X) = X^2 - 3\sqrt{2}X + 4$. On note Δ son discriminant.

$$\Delta = (-3\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 4 = 18 - 16 = 2$$

Les racines de Q sont donc :

$$x_1 = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Comme $x_1 \neq x_2$, l'ensemble des solutions de (H_1) est :

$$\{x \mapsto \lambda e^{\sqrt{2}x} + \mu e^{2\sqrt{2}x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E_1) .
Comme le second membre de (E_1) est une constante, on cherche une fonction constante solution de (E_1) .
Soit $c \in \mathbb{R}$. On note alors $g : x \mapsto c$. La fonction g est bien de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} g \text{ est solution de } (E_1) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \ g''(x) - 3\sqrt{2}g'(x) + 4g(x) = 8 \\ &\Leftrightarrow 4c = 8 \\ &\Leftrightarrow c = 2 \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $g_1 : x \mapsto 2$ est une solution particulière de (E_1) .

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E_1) est :

$$\{x \mapsto \lambda e^{\sqrt{2}x} + \mu e^{2\sqrt{2}x} + 2 \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

2) Résolvons (E_2) .

- On commence par résoudre son équation homogène associée $(H_2) \ y'' + 6y' + 9y = 0$.
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On détermine donc les racines de son polynôme caractéristique $Q(X) = X^2 + 6X + 9 = (X + 3)^2$. L'unique racine de Q est donc :

$$x_0 = -3$$

L'ensemble des solutions de (H_2) est :

$$\{x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{-3x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E_2) .

Comme le second membre de (E_2) est une constante, on cherche une fonction constante solution de (E_2) .

Soit $c \in \mathbb{R}$. On note alors $g : x \mapsto c$. La fonction g est bien de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} g \text{ est solution de } (E_2) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g''(x) + 6g'(x) + 9g(x) = 7 \\ &\Leftrightarrow 9c = 7 \\ &\Leftrightarrow c = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $g_2 : x \mapsto \frac{7}{9}$ est une solution particulière de (E_2) .

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E_2) est :

$$\left\{ x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{-3x} + \frac{7}{9} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

3) Résolvons (E_3) .

- On commence par résoudre son équation homogène associée (H_3) $y'' - y = 0$.

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On détermine donc les racines de son polynôme caractéristique $Q(X) = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$. Les racines de Q sont donc :

$$x_1 = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = -1$$

Comme $x_1 \neq x_2$, l'ensemble des solutions de (H_3) est :

$$\{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E_3) .

Comme le second membre de (E_3) est une fonction polynomiale de degré 2, on cherche une fonction polynomiale de degré 2 solution de (E_3) .

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On note alors $g : x \mapsto ax^2 + bx + c$. La fonction g est bien de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} g \text{ est solution de } (E_3) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, g''(x) - g(x) = 3x^2 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, 2a - (ax^2 + bx + c) = 3x^2 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, -ax^2 - bx + (2a - c) = 3x^2 \\ &\iff \begin{cases} -a & & = 3 \\ & - b & = 0 \\ 2a & & - c = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}{\iff} \begin{cases} -a & & = 3 \\ & - b & = 0 \\ & & - c = 6 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a & & = -3 \\ & b & = 0 \\ & & c = -6 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $g_3 : x \mapsto -3x^2 - 6$ est une solution particulière de (E_3) .

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E_3) est :

$$\{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x} - 3(x^2 + 2) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

4) Résolvons (E_4) .

- On commence par résoudre son équation homogène associée (H_4) $2y'' - 3y' + y = 0$.
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On détermine donc les racines de son polynôme caractéristique $Q(X) = 2X^2 - 3X + 1 = 2(X - 1)\left(X - \frac{1}{2}\right)$. Les racines de Q sont donc :

$$x_1 = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

Comme $x_1 \neq x_2$, l'ensemble des solutions de (H_4) est :

$$\{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{\frac{1}{2}x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E_4) .
Comme le second membre de (E_4) est $x \mapsto x e^{(-1) \times x}$ et que $x_1 \neq -1$ et $x_2 \neq -1$, on cherche une solution de (E_4) sous la forme $x \mapsto (ax + b)e^{-x}$.
(le degré de la fonction polynomiale $x \mapsto ax + b$ est égal au degré de $x \mapsto x$ (fonction polynomiale précédant e^{-x} dans le second membre de (E_4)) auquel on ajoute 0 (l'ordre de multiplicité de la racine -1 pour le polynôme Q))
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note alors $g : x \mapsto (ax + b)e^{-x}$. La fonction g est bien de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= a e^{-x} + (ax + b) \times (-e^{-x}) = (-ax + a - b)e^{-x} \\ g''(x) &= -a e^{-x} + (-ax + a - b) \times (-e^{-x}) = (ax + b - 2a)e^{-x} \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} &g \text{ est solution de } (E_4) \\ \iff &\forall x \in \mathbb{R}, 2g''(x) - 3g'(x) + g(x) = x e^{-x} \\ \iff &\forall x \in \mathbb{R}, 2(ax + b - 2a)e^{-x} - 3(-ax + a - b)e^{-x} + (ax + b)e^{-x} = x e^{-x} \\ \iff &\forall x \in \mathbb{R}, (6ax + 6b - 7a)e^{-x} = x e^{-x} \\ \iff &\forall x \in \mathbb{R}, 6ax + 6b - 7a = x \quad (\text{car } \forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} \neq 0) \\ \iff &\begin{cases} 6a &= 1 \\ -7a + 6b &= 0 \end{cases} \\ \stackrel{L_2 \leftarrow 6L_2 + 7L_1}{\iff} &\begin{cases} 6a &= 1 \\ 36b &= 7 \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} a &= \frac{1}{6} \\ b &= \frac{7}{36} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $g_4 : x \mapsto \left(\frac{1}{6}x + \frac{7}{36}\right)e^{-x}$ est une solution particulière de (E_4) .

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E_4) est :

$$\left\{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{6}\left(x + \frac{7}{6}\right)e^{-x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

5) Résolvons (E_5) .

- On commence par résoudre son équation homogène associée (H_5) $2y'' - 3y' + y = 0$.
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On détermine donc les racines de son polynôme caractéristique $Q(X) = 2X^2 - 3X + 1 = 2(X - 1)\left(X - \frac{1}{2}\right)$. Les racines de Q sont donc :

$$x_1 = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

Comme $x_1 \neq x_2$, l'ensemble des solutions de (H_5) est :

$$\{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{\frac{1}{2}x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E_5) .
Comme le second membre de (E_5) est $x \mapsto x e^{1 \times x}$ et que $x_1 = 1$ et $x_2 \neq 1$, on cherche une solution de (E_5) sous la forme $x \mapsto (ax^2 + bx)e^x$.
(le degré de la fonction polynomiale $x \mapsto ax^2 + bx$ est égal au degré de $x \mapsto x$ (fonction polynomiale précédant e^x dans le second membre de (E_5)) auquel on ajoute 1 (l'ordre de multiplicité de la racine 1 pour le polynôme Q))
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note alors $g : x \mapsto (ax^2 + bx)e^x$. La fonction g est bien de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx) \times e^x = (ax^2 + (2a + b)x + b)e^x \\ g''(x) &= (2ax + (2a + b))e^x + (ax^2 + (2a + b)x + b) \times e^x \\ &= (ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b)e^x \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} &2g''(x) - 3g'(x) + g(x) \\ &= 2(ax^2 + (4a + b)x + (2a + 2b))e^x - 3((ax^2 + (2a + b)x + b)e^x + (ax^2 + bx)e^x) \\ &= (2ax + (4a + b))e^x \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} &g \text{ est solution de } (E_5) \\ \iff &\forall x \in \mathbb{R}, 2g''(x) - 3g'(x) + g(x) = xe^x \\ \iff &\forall x \in \mathbb{R}, (2ax + (4a + b))e^x = xe^x \\ \iff &\forall x \in \mathbb{R}, 2ax + (4a + b) = x \quad (\text{car } \forall x \in \mathbb{R}, e^x \neq 0) \\ \iff &\begin{cases} 2a &= 1 \\ 4a + b &= 0 \end{cases} \\ \stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\iff} &\begin{cases} 2a &= 1 \\ &b = -2 \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} a &= \frac{1}{2} \\ &b = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $g_5 : x \mapsto \left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right)e^x$ est une solution particulière de (E_4) .

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E_4) est :

$$\left\{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{\frac{1}{2}x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right)e^x \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

6) Résolvons (E_6) .

- On commence par résoudre son équation homogène associée (H_6) $y'' - 4y' + 4y = 0$.
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On détermine donc les racines de son polynôme caractéristique $Q(X) = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$. L'unique racine de Q est donc :

$$x_0 = 2$$

L'ensemble des solutions de (H_6) est :

$$\{x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{2x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E_6) .
Comme le second membre de (E_6) est une somme, on cherche :
× une solution particulière h_6 de (E'_6) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$
× une solution particulière \tilde{h}_6 de (E''_6) $y'' - 4y' + 4y = 4$.

Par principe de superposition, la fonction $g_6 = h_6 + \tilde{h}_6$ sera une solution particulière de (E_6) .

- × Cherchons une solution particulière de (E'_6) .

Comme le second membre de (E'_6) est $x \mapsto 2e^{2 \times x}$ et que $x_0 = 2$, on cherche une solution de (E'_6) sous la forme $x \mapsto (ax^2) e^{2x}$.

(le degré de la fonction polynomiale $x \mapsto ax^2$ est égal au degré de $x \mapsto 2$ (fonction polynomiale précédant e^{2x} dans le second membre de (E'_6)) auquel on ajoute 2 (l'ordre de multiplicité de la racine 2 pour le polynôme Q))

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note alors $g : x \mapsto ax^2 e^{2x}$. La fonction g est bien de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = (2ax) e^{2x} + (ax^2) \times (2e^{2x}) = (2ax^2 + 2ax) e^{2x}$$

$$g''(x) = (4ax + 2a) e^{2x} + (2ax^2 + 2ax) \times (2e^{2x}) = (4ax^2 + 8ax + 2a) e^{2x}$$

On obtient :

g est solution de (E'_6)

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g''(x) - 4g'(x) + 4g(x) = 2e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (4ax^2 + 8ax + 2a) e^{2x} - 4(2ax^2 + 2ax) e^{2x} + 4ax^2 e^{2x} = 2e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2ae^x = 2e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 2a = 2 \quad (\text{car } \forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow a = 1$$

Ainsi, la fonction $h_6 : x \mapsto x^2 e^{2x}$ est une solution particulière de (E'_6) .

- × Cherchons une solution particulière de (E''_6) .

Comme le second membre de (E''_6) est une constante, on cherche une fonction constante solution de (E''_6) .

Soit $c \in \mathbb{R}$. On note alors $h : x \mapsto c$. La fonction h est bien de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

$$h \text{ est solution de } (E''_6) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, h''(x) - 4h'(x) + 4h(x) = 4$$

$$\Leftrightarrow 4c = 4$$

$$\Leftrightarrow c = 1$$

Ainsi, la fonction $\tilde{h}_6 : x \mapsto 1$ est une solution particulière de (E''_6) .

La fonction $g_6 : x \mapsto x^2 e^{2x} + 1$ est donc une solution particulière de (E_6) .

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E_6) est :

$$\{x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{2x} + x^2 e^{2x} + 1 \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

7) Résolvons (E_7).

- On commence par résoudre son équation homogène associée (H_7) $y'' + y' + y = 0$.
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On détermine donc les racines de son polynôme caractéristique $Q(X) = X^2 + X + 1$. On note Δ son discriminant.

$$\Delta = 1 - 4 = -3$$

Les racines de Q sont donc :

$$x_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

(cela illustre que si Q est un polynôme à coefficients réels, alors le conjugué d'une racine complexe de Q est encore racine de Q)

Comme $x_1 \neq x_2$, l'ensemble des solutions de (H_7) est :

$$\left\{ x \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E_7).
Comme le second membre de (E_7) est $x \mapsto \sin(2x)$, on cherche une solution de (E_7) sous la forme $x \mapsto a \cos(2x) + b \sin(2x)$.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note alors $g : x \mapsto a \cos(2x) + b \sin(2x)$. La fonction g est bien de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = -2a \sin(2x) + 2b \cos(2x)$$

$$g''(x) = -4a \cos(2x) - 4b \sin(2x)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} & g \text{ est solution de } (E_7) \\ \iff & \forall x \in \mathbb{R}, g''(x) + g'(x) + g(x) = \sin(2x) \\ \iff & \forall x \in \mathbb{R}, (-3a + 2b) \cos(2x) + (-2a - 3b) \sin(2x) = \sin(2x) \\ \iff & \begin{cases} -3a + 2b = 0 \\ -2a - 3b = 1 \end{cases} \\ \stackrel{L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1}{\iff} & \begin{cases} -3a + 2b = 0 \\ -13b = 3 \end{cases} \\ \stackrel{L_1 \leftarrow 13L_1 + 2L_2}{\iff} & \begin{cases} -39a = 6 \\ -13b = 3 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a = -\frac{2}{13} \\ b = -\frac{3}{13} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $g_7 : x \mapsto -\frac{2}{13} \cos(2x) - \frac{3}{13} \sin(2x)$ est une solution particulière de (E_7).

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E_7) est :

$$\left\{ x \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{2}{13} \cos(2x) - \frac{3}{13} \sin(2x) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

□

IV. Séance 3 : méthodes de calcul d'intégrales

IV.1. Intégrales à vue

Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+4x}} dx & \text{c)} \int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + x} dx & \text{e)} \int_1^e \frac{(\ln(x))^2}{x} dx & \text{g)} \int_e^2 \frac{\ln(x)}{x} dx \\
 \text{b)} \int_1^{1/\ln(2)} 2^x dx & \text{d)} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{x^2 + 1} dx & \text{f)} \int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx &
 \end{array}$$

Démonstration.

a) La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+4x}}$ est continue sur le **SEGMENT** $[0, 2]$.

Ainsi, l'intégrale est bien définie. De plus :

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+4x}} dx &= \int_0^2 (1+4x)^{-\frac{1}{2}} dx \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^2 4 (1+4x)^{-\frac{1}{2}} dx \\
 &= \frac{1}{4} \left[\frac{(1+4x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_0^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{\frac{1}{2}} \left[\sqrt{1+4x} \right]_0^2 \\
 &= \frac{1}{2} (\sqrt{1+8} - \sqrt{1}) = \frac{1}{2} (3 - 1) = 1
 \end{aligned}$$

b) La fonction $f : x \mapsto 2^x$ est continue sur le **segment** $[1, \frac{1}{\ln(2)}]$.

Ainsi, l'intégrale est bien définie. De plus :

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\frac{1}{\ln(2)}} 2^x dx &= \int_1^{\frac{1}{\ln(2)}} e^{x \ln(2)} dx \\
 &= \left[\frac{e^{x \ln(2)}}{\ln(2)} \right]_1^{\frac{1}{\ln(2)}} \\
 &= \frac{1}{\ln(2)} \left[e^{x \ln(2)} \right]_1^{\frac{1}{\ln(2)}} \\
 &= \frac{1}{\ln(2)} (e^1 - e^{\ln(2)}) = \frac{1}{\ln(2)} (e - 2)
 \end{aligned}$$

c) La fonction $f : x \mapsto \frac{e^x + 1}{e^x + x}$ est continue sur le **SEGMENT** $[0, 1]$.

Ainsi, l'intégrale est bien définie. De plus :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + x} dx &= \left[\ln(|e^x + x|) \right]_0^1 \\
 &= \ln(|e^1 + 1|) - \ln(|e^0 + 0|) \\
 &= \ln(e^1 + 1) - \cancel{\ln(1)} = \ln(e^1 + 1)
 \end{aligned}$$

d) La fonction $f : x \mapsto \frac{4x}{x^2 + 1}$ est continue sur le **SEGMENT** $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}]$.

Ainsi, l'intégrale est bien définie. De plus :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{x^2 + 1} dx &= 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{2x}{x^2 + 1} dx \\ &= 2 \left[\ln(|x^2 + 1|) \right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \\ &= 2 \left(\ln(|3 + 1|) - \ln\left(\left|\frac{1}{3} + 1\right|\right) \right) \\ &= 2 \left(\ln(4) - \ln\left(\frac{4}{3}\right) \right) = 2 \left(\cancel{\ln(4)} - (\cancel{\ln(4)} - \ln(3)) \right) = 2 \ln(3) \end{aligned}$$

e) La fonction $f : x \mapsto \frac{(\ln(x))^2}{x}$ est continue sur le **SEGMENT** $[1, e]$.

Ainsi, l'intégrale est bien définie. De plus :

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{(\ln(x))^2}{x} dx &= \int_1^e \frac{1}{x} (\ln(x))^2 dx \\ &= \left[\frac{(\ln(x))^{2+1}}{2+1} \right]_1^e = \frac{1}{3} \left[(\ln(x))^3 \right]_1^e \\ &= \frac{1}{3} \left((\ln(e))^3 - \cancel{(\ln(1))^3} \right) = \frac{1}{3} 1^3 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

f) La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x (\ln(x))^2}$ est continue sur le **SEGMENT** $[e, e^2]$.

Ainsi, l'intégrale est bien définie. De plus :

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} \frac{1}{x (\ln(x))^2} dx &= \int_e^{e^2} \frac{1}{x} (\ln(x))^{-2} dx \\ &= \left[\frac{(\ln(x))^{-2+1}}{-2+1} \right]_e^{e^2} = \frac{1}{-1} \left[\frac{1}{\ln(x)} \right]_e^{e^2} \\ &= - \left(\frac{1}{\ln(e^2)} - \frac{1}{\ln(e)} \right) = - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

g) La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est continue sur le **SEGMENT** $[2, e]$.

(attention, il s'agit bien du segment $[2, e]$ et pas $[e, 2]$ puisque : $e \simeq 2,71 > 2$!)

Ainsi, l'intégrale est bien définie. De plus :

$$\begin{aligned} \int_e^2 \frac{\ln(x)}{x} dx &= \int_e^2 \frac{1}{x} (\ln(x))^1 dx \\ &= \left[\frac{(\ln(x))^{1+1}}{1+1} \right]_e^2 = \frac{1}{2} \left[(\ln(x))^2 \right]_e^2 \\ &= \frac{1}{2} \left((\ln(2))^2 - (\ln(e))^2 \right) = \frac{1}{2} \left((\ln(2))^2 - 1 \right) \end{aligned}$$

Commentaire

- Dans la rédaction, on fait apparaître une règle classique de « primitivation ». On rappelle dans les tableaux ci-dessous les règles à connaître.

Fonction	Tout intervalle I tel que :	Une primitive
$x \mapsto a$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto ax + \lambda$
$x \mapsto x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + \lambda$
$x \mapsto x^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$I \subset \mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$I \subset \mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \ln(x) + \lambda$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$I \subset \mathbb{R}_-^*$	$x \mapsto \ln(-x) + \lambda$
$x \mapsto e^x$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto e^x + \lambda$
$x \mapsto a^x$ (avec $a > 0$ et $a \neq 1$)	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{a^x}{\ln(a)} + \lambda$

$x \mapsto u'(x) (u(x))^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	$\times u$ dérivable sur I .	$x \mapsto \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + \lambda$
$x \mapsto u'(x) (u(x))^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$\times u$ dérivable sur I . $\times u > 0$ sur I .	$x \mapsto \frac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda$
$x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$	$\times u$ dérivable sur I . $\times u \neq 0$ sur I .	$x \mapsto \ln(u(x)) + \lambda$
$x \mapsto u'(x) e^{u(x)}$	$\times u$ dérivable sur I .	$x \mapsto e^{u(x)} + \lambda$

(où λ est un réel quelconque)

- Lorsque la fonction f est positive sur le segment d'intégration $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$. Ainsi, le signe du résultat est une bonne mesure de vérification.

□

IV.2. Décomposition en éléments simples

Exercice 8

Calculer les intégrales suivantes.

$$a) \int_0^1 \frac{t}{t+1} dt$$

$$b) \int_3^4 \frac{4}{t(t^2-4)} dt$$

$$c) \int_3^5 \frac{dt}{(t+1)(t-2)}$$

Démonstration.

a) La fonction $f : t \mapsto \frac{t}{t+1}$ est continue sur le SEGMENT $[0, 1]$.

Ainsi, l'intégrale est bien définie. De plus, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\frac{t}{t+1} = \frac{(t+1)-1}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t}{t+1} dt &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= \int_0^1 1 dt - \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt \quad (\text{par linéarité de l'intégrale } (*)) \\ &= 1 - [\ln(|t+1|)]_0^1 \\ &= 1 - (\ln(|2|) - \ln(|1|)) \\ &= 1 - \ln(2) + \ln(1) \end{aligned}$$

(*) les fonctions $f_1 : t \mapsto 1$ et $f_2 : t \mapsto \frac{1}{t+1}$ étant continues sur le segment $[0, 1]$, les intégrales $\int_0^1 f_1(t) dt$ et $\int_0^1 f_2(t) dt$ sont bien définies.

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t}{t+1} dt = 1 - \ln(2)}$$

Commentaire

On se sert ici du fait que la fraction $\frac{t}{t+1}$ a pour dénominateur et numérateur deux polynômes de même degré. La manipulation indiquée permet de faire apparaître une fraction dont le numérateur est de plus petit degré.

b) La fonction $f : t \mapsto \frac{4}{t(t^2-4)}$ est continue sur le SEGMENT $[3, 4]$.

Ainsi, l'intégrale est bien définie. Cherchons alors $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $t \notin \{-2, 0, 2\}$:

$$\frac{1}{t(t^2-4)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-2} + \frac{c}{t+2}$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{a}{t} + \frac{b}{t-2} + \frac{c}{t+2} &= \frac{a(t-2)(t+2) + b t(t+2) + c t(t-2)}{t(t^2-4)} \\ &= \frac{(a+b+c)t^2 + (2b-2c)t - 4a}{t(t^2-4)} \end{aligned}$$

On procède alors par identification :

$$\begin{aligned} \forall t \notin \{-2, 0, 2\}, \quad \frac{1}{t(t^2 - 4)} &= \frac{(a + b + c)t^2 + (2b - 2c)t - 4a}{t(t^2 - 4)} \\ \Leftrightarrow \quad \forall t \notin \{-2, 0, 2\}, \quad 1 &= (a + b + c)t^2 + (2b - 2c)t - 4a \\ \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4a & = 1 \\ a + b + c & = 0 \\ 2b - 2c & = 0 \end{cases} \\ \begin{matrix} L_2 \leftarrow 4L_2 + L_1 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} -4a & = 1 \\ 4b + 4c & = 1 \\ 2b - 2c & = 0 \end{cases} \\ \begin{matrix} L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} -4a & = 1 \\ 4b + 4c & = 1 \\ -8c & = -1 \end{cases} \\ \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} -4a & = 1 \\ 8b & = 1 \\ -8c & = -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a & = -\frac{1}{4} \\ b & = \frac{1}{8} \\ c & = \frac{1}{8} \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{4}{t(t^2 - 4)} dt &= 4 \int_3^4 \left(-\frac{1}{4} \frac{1}{t} + \frac{1}{8} \frac{1}{t-2} + \frac{1}{8} \frac{1}{t+2} \right) dt \\ &= -\int_3^4 \frac{1}{t} dt + \int_3^4 \frac{1}{8} \frac{1}{t-2} dt + \frac{1}{8} \int_3^4 \frac{1}{t+2} dt \quad (\text{par linéarité de l'intégrale } (*)) \\ &= -[\ln(|t|)]_3^4 + \frac{1}{2} [\ln(|t-2|)]_3^4 + \frac{1}{2} [\ln(|t+2|)]_3^4 \\ &= -(\ln(4) - \ln(3)) + \frac{1}{2} (\ln(2) - \ln(1)) + \frac{1}{2} (\ln(6) - \ln(5)) \\ &= -(\ln(4) - \ln(3)) + \frac{1}{2} (\ln(2) - \ln(1)) + \frac{1}{2} (\ln(6) - \ln(5)) \\ &= -(2 \ln(2) - \ln(3)) + \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} (\ln(2) + \ln(3) - \ln(5)) \\ &= \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \ln(2) + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \ln(3) - \frac{1}{2} \ln(5) \\ &= -\ln(2) + \frac{3}{2} \ln(3) - \frac{1}{2} \ln(5) \end{aligned}$$

(*) les fonctions $f_1 : t \mapsto \frac{1}{t}$, $f_2 : t \mapsto \frac{1}{t-2}$ et $f_3 : t \mapsto \frac{1}{t+2}$ étant continues sur le segment $[3, 4]$, les intégrales $\int_3^4 f_i(t) dt$ sont bien définies.

$$\boxed{\int_3^4 \frac{4}{t(t^2 - 4)} dt = -\ln(2) + \frac{3}{2} \ln(3) - \frac{1}{2} \ln(5)}$$

c) La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{(t+1)(t-2)}$ est continue sur le SEGMENT $[3, 5]$.

Ainsi, l'intégrale est bien définie. Cherchons alors $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $t \notin \{-1, 2\}$:

$$\frac{1}{(t+1)(t-2)} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t-2}$$

Or :

$$\frac{a}{t+1} + \frac{b}{t-2} = \frac{a(t-2) + b(t+1)}{(t+1)(t-2)} = \frac{(a+b)t + (b-2a)}{(t+1)(t-2)}$$

On procède alors par identification :

$$\begin{aligned} \forall t \notin \{-1, 2\}, \quad \frac{1}{(t+1)(t-2)} &= \frac{(a+b)t + (b-2a)}{(t+1)(t-2)} \\ \iff \forall t \notin \{-1, 2\}, \quad 1 &= (a+b)t + (b-2a) \\ \iff \begin{cases} a + b &= 0 \\ -2a + b &= 1 \end{cases} \\ \stackrel{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\iff} \begin{cases} a + b &= 0 \\ 3b &= 1 \end{cases} \\ \stackrel{L_1 \leftarrow 3L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} 3a &= -1 \\ 3b &= 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_3^5 \frac{1}{(t+1)(t-2)} dt &= \int_3^5 \left(-\frac{1}{3} \frac{1}{t+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{t-2} \right) dt \\ &= -\frac{1}{3} \int_3^5 \frac{1}{t+1} dt + \frac{1}{3} \int_3^5 \frac{1}{t-2} dt \quad (\text{par linéarité de l'intégrale } (*)) \\ &= -\frac{1}{3} [\ln(|t+1|)]_3^5 + \frac{1}{3} [\ln(|t-2|)]_3^5 \\ &= -\frac{1}{3} (\ln(6) - \ln(4)) + \frac{1}{3} (\ln(3) - \ln(1)) \\ &= -\frac{1}{3} (\ln(6) - \ln(4)) + \frac{1}{3} (\ln(3) - \cancel{\ln(1)}) \\ &= -\frac{1}{3} (\ln(2) + \ln(3) - 2 \ln(2)) + \frac{1}{3} \ln(3) \\ &= \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) \ln(2) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \ln(3) = \frac{1}{3} \ln(2) \end{aligned}$$

(*) les fonctions $f_1 : t \mapsto \frac{1}{t+1}$, $f_2 : t \mapsto \frac{1}{t-2}$ étant continues sur le segment $[3, 5]$, les intégrales $\int_3^5 f_i(t) dt$ sont bien définies.

$$\boxed{\int_3^5 \frac{1}{(t+1)(t-2)} dt = \frac{1}{3} \ln(2)}$$

□

IV.3. Intégration par parties

Exercice 9

Calculer les intégrales suivantes.

$$a) I = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$$

$$b) I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx$$

$$c) I = \int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^2} dx$$

Démonstration.

a) • La fonction $f : x \mapsto x^3 e^{x^2}$ est continue sur le segment $[0, 1]$.

L'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$ est donc bien définie.

• On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = x^2 & u'(x) = 2x \\ v'(x) = x e^{x^2} & v(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. On obtient :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \left[x^2 e^{x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 x e^{x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} (e^1 - 0) - \frac{1}{2} \int_0^1 2x e^{x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} \left[e^{x^2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} (e^1 - e^0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}}$$

b) • La fonction $f : x \mapsto \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$ est continue sur le segment $[\frac{1}{2}, 1]$.

L'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$ est donc bien définie.

• On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = \frac{1}{x} & u'(x) = -\frac{1}{x^2} \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} & v(x) = -e^{\frac{1}{x}} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[\frac{1}{2}, 1]$. On obtient :

$$\begin{aligned} I &= - \left[\frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} \right]_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx \\ &= - (e^1 - 2 e^2) + \left[e^{\frac{1}{x}} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = - (e^1 - 2 e^2) + (e^1 - e^2) = e^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx = e^2}$$

c) • La fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{(1+x^2)^2}$ est continue sur le segment $[0, 1]$.

L'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$ est donc bien définie.

• On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = x^2 & u'(x) = 2x \\ v'(x) = x(1+x^2)^{-2} & v(x) = \frac{1}{2} \frac{(1+x^2)^{-1}}{-1} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. On obtient :

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2} \left[x^2 (1+x^2)^{-1} \right]_0^1 + \int_0^1 x (1+x^2)^{-1} dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{1+x^2} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 0 \right) + \frac{1}{2} \left[\ln(|1+x^2|) \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} (\ln(|2|) - \ln(|1|)) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln(2) \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln(2)}$$

□

IV.4. Changements de variable

Exercice 10

On note $I = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$.

1. a) À l'aide du changement de variable $u = e^x$ démontrer que : $I = \int_1^e \frac{1}{u+1} \frac{1}{u} du$.

Démonstration.

• On effectue le changement de variable $\boxed{u = e^x}$.

$$\left| \begin{array}{l} u = e^x \quad (\text{et donc } x = \ln(u), \text{ ce qui est valide car } u > 0) \\ \Leftrightarrow du = e^x dx \quad \text{et} \quad dx = \frac{1}{e^x} du = \frac{1}{u} du \\ \bullet x = 0 \Rightarrow u = e^0 = 1 \\ \bullet x = 1 \Rightarrow u = e^1 = e \end{array} \right.$$

• Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto \ln(u)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[1, e]$.
On obtient alors :

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_1^e \frac{1}{u+1} \frac{1}{u} du$$

$$\boxed{I = \int_1^e \frac{1}{u+1} \frac{1}{u} du}$$

□

b) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\frac{1}{u(u+1)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{u+1}$$

pour tout $u \notin \{-1, 0\}$.

Démonstration.

Soit $u \notin \{-1, 0\}$. Écrivons :

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{u+1} = \frac{a(u+1) + bu}{u(u+1)} = \frac{(a+b)u + a}{u(u+1)}$$

On procède alors par identification :

$$\begin{aligned} \forall u \notin \{-1, 0\}, \frac{1}{u(u+1)} = \frac{(a+b)u + a}{u(u+1)} &\iff \forall u \notin \{-1, 0\}, 1 = (a+b)u + a \\ &\iff \begin{cases} a &= 1 \\ a + b &= 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} a &= 1 \\ b &= -1 \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit : $\frac{1}{u(u+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}$.

□

c) En déduire la valeur de I .

Démonstration.

D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e \frac{1}{u(u+1)} du = \int_1^e \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= \int_1^e \frac{1}{u} du - \int_1^e \frac{1}{u+1} du \\ &= [\ln(|u|)]_1^e - [\ln(|u+1|)]_1^e \\ &= \ln(e) - \ln(e+1) - (\ln(1) - \ln(2)) \\ &= 1 - \ln(e+1) + \ln(2) \end{aligned}$$

$I = 1 - \ln(e+1) + \ln(2)$.

□

2. Procéder de même pour calculer $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

On pourra poser le changement de variable $u = \sqrt{1+e^x}$.

Démonstration.

- On effectue le changement de variable $u = \sqrt{1+e^x}$.

$$\begin{aligned} &u = \sqrt{1+e^x} \quad (\text{et donc } 1+e^x = u^2, \text{ puis } x = \ln(u^2 - 1) \text{ ce qui est valide car } u^2 - 1 > 0) \\ \hookrightarrow &du = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} dx \quad \text{et} \quad dx = \frac{2\sqrt{1+e^x}}{e^x} du = \frac{2u}{u^2-1} du \\ &\bullet x = 0 \Rightarrow u = \sqrt{1+e^0} = \sqrt{2} \\ &\bullet x = 1 \Rightarrow u = \sqrt{1+e^1} \end{aligned}$$

- Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto \ln(u^2 - 1)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[\sqrt{2}, \sqrt{1+e}]$.
On obtient alors :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{1}{u} \frac{2u}{u^2-1} du$$

$$I = 2 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{1}{u^2-1} du$$

- Cherchons alors $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $u \notin \{-1, 1\}$:

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{u+1}$$

Or :

$$\frac{a}{u-1} + \frac{b}{u+1} = \frac{a(u+1) + b(u-1)}{u^2-1} = \frac{(a+b)u + (a-b)}{u^2-1}$$

On procède alors par identification :

$$\forall u \notin \{-1, 1\}, \frac{1}{u^2-1} = \frac{(a+b)u + (a-b)}{u^2-1} \iff \forall u \notin \{-1, 1\}, 1 = (a+b)u + (a-b)$$

$$\iff \begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

$$\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} a - b = 1 \\ 2b = -1 \end{cases}$$

$$\stackrel{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2}{\iff} \begin{cases} 2a & = & 1 \\ 2b & = & -1 \end{cases}$$

$$\text{On en déduit : } \frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{u-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{u+1}.$$

- Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} 2 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{1}{u^2-1} du &= 2 \left(\frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{1}{u-1} du - \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{1}{u+1} du \right) \quad (\text{par linéarité de l'intégrale } (*)) \\ &= [\ln(|u-1|)]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} - [\ln(|u+1|)]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \\ &= (\ln(|\sqrt{1+e}-1|) - \ln(|\sqrt{2}-1|)) - (\ln(|\sqrt{1+e}+1|) - \ln(|\sqrt{2}+1|)) \\ &= (\ln(\sqrt{1+e}-1) - \ln(\sqrt{2}-1)) - (\ln(\sqrt{1+e}+1) - \ln(\sqrt{2}+1)) \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{1+e}-1}{\sqrt{1+e}+1}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) \end{aligned}$$

(*) les fonctions $f_1 : u \mapsto \frac{1}{u-1}$, $f_2 : u \mapsto \frac{1}{u+1}$ étant continues sur le segment $[\sqrt{2}, \sqrt{1+e}]$, les intégrales $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} f_i(u) du$ sont bien définies.

$$I = \ln\left(\frac{\sqrt{1+e}-1}{\sqrt{1+e}+1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

□

V. Séance 4 : calcul d'intégrales définies par une relation de récurrence

Exercice 11

On considère, pour tout entier naturel n , l'application φ_n définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx$$

1. Calculer I_0, I_1 .

Démonstration.

- La fonction $\varphi_0 : x \mapsto (1-x)^0 e^{-2x} = e^{-2x}$ est continue sur le segment $[0, 1]$.

L'intégrale $\int_0^1 \varphi_0(x) dx$ est donc bien définie.

$$I_0 = \int_0^1 e^{-2x} dx = \left[\frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^1 = \frac{-1}{2} (e^{-2} - e^0) = \frac{1}{2} (1 - e^{-2})$$

- La fonction $\varphi_1 : x \mapsto (1-x) e^{-2x}$ est continue sur le segment $[0, 1]$.

L'intégrale $\int_0^1 \varphi_1(x) dx$ est donc bien définie. On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = 1-x & u'(x) = -1 \\ v'(x) = e^{-2x} & v(x) = \frac{-1}{2} e^{-2x} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. On obtient :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 (1-x) e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \left[(1-x) e^{-2x} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2} ((1-1) e^{-2} - e^0) - \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} (1 - I_0) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (1 + e^{-2}) \end{aligned}$$

$$\boxed{I_0 = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) \text{ et } I_1 = \frac{1}{4} (1 + e^{-2}).}$$

□

2. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n .

Démonstration.

Soit $x \in [0, 1]$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord : $(1-x) \geq 0$. On en déduit : $(1-x)^n \geq 0$.
- De plus : $e^{-2x} \geq 0$.

Ainsi : $\varphi_n(x) \geq 0$. Enfin, par positivité de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leq 1$) :

$$\int_0^1 \varphi_n(x) dx \geq 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N} : I_n \geq 0.}$$

□

3. a) Pour $n \in \mathbb{N}$, écrire $I_{n+1} - I_n$ sous forme d'une intégrale.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \varphi_{n+1}(x) dx - \int_0^1 \varphi_n(x) dx \\
 &= \int_0^1 (\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)) dx \\
 &= \int_0^1 ((1-x)^{n+1} e^{-2x} - (1-x)^n e^{-2x}) dx \\
 &= \int_0^1 ((\cancel{1} - x) - \cancel{1}) (1-x)^n e^{-2x} dx \\
 &= - \int_0^1 x (1-x)^n e^{-2x} dx
 \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n = - \int_0^1 x (1-x)^n e^{-2x} dx$$

□

b) En déduire la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Démonstration.

Soit $x \in [0, 1]$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

On procède comme en question 2. :

- $x \geq 0$.
- $(1-x) e^{-2x} \geq 0$.

Ainsi : $x(1-x) e^{-2x} \geq 0$. Enfin, par positivité de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leq 1$) :

$$I_{n+1} - I_n = - \int_0^1 x(1-x) e^{-2x} dx \leq 0$$

On en déduit que la suite (I_n) est décroissante.

□

c) En déduire enfin que la suite (I_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

Démonstration.

La suite (I_n) est décroissante minorée. Elle est donc convergente vers une limite $\ell \geq 0$.

□

4. À l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$$

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappelons : $I_{n+1} = \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x} dx$.

On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = (1-x)^{n+1} & u'(x) = -(n+1)(1-x)^n \\ v'(x) = e^{-2x} & v(x) = \frac{-1}{2} e^{-2x} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. On obtient :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \left[(1-x)^{n+1} e^{-2x} \right]_0^1 - \frac{1}{2} (n+1) \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \left(\cancel{(1-1)^{n+1}} e^{-2} - e^0 \right) - \frac{1}{2} (n+1) I_n \\ &= \frac{1}{2} (1 - (n+1) I_n) \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$.

□

5. En déduire la valeur de ℓ .

Démonstration.

D'après la question 3.b), on sait que la suite (I_n) admet une limite finie $\ell \geq 0$.

Supposons par l'absurde que $\ell \neq 0$.

D'après la question précédente :

$$\begin{array}{ccc} 2I_{n+1} & = & 1 - (n+1)I_n \\ \begin{array}{c} \approx \\ \downarrow \\ \frac{1}{2} \\ \downarrow \\ 2\ell \end{array} & & \begin{array}{c} \approx \\ \downarrow \\ \frac{1}{2} \\ \downarrow \\ -\infty \end{array} \end{array}$$

Ce qui est impossible puisque $2\ell \neq -\infty$.

Ainsi, $\ell = 0$.

□

Exercice 12

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On définit pour tout entier naturel n , l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-ax} dx$.

1. Démontrer que I_0 est une intégrale convergente et déterminer sa valeur.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto x^0 e^{-ax} = e^{-ax}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Soit $A \geq 0$.

$$\int_0^A e^{-ax} dx = -\frac{1}{a} [e^{-ax}]_0^A = -\frac{1}{a}(e^{-aA} - e^0) = \frac{1}{a} - \frac{e^{-aA}}{a}$$

Or $\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-aA} = 0$ car $a > 0$.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$ est convergente et vaut $\frac{1}{a}$.

□

2. Démontrer que I_1 est une intégrale convergente et déterminer sa valeur.

On pourra penser à une intégration par parties.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto x^1 e^{-ax} = x e^{-ax}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Soit $A \geq 0$. On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-ax} & v(x) = \frac{-1}{a} e^{-ax} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, A]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^A x e^{-ax} dx &= \frac{-1}{a} [x e^{-ax}]_0^A + \frac{1}{a} \int_0^A e^{-ax} dx \\ &= \frac{-1}{a} (A e^{-aA} - 0) + \frac{1}{a} \left(\frac{1}{a} - \frac{e^{-aA}}{a} \right) \quad (\text{d'après la question précédente}) \\ &= \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} A e^{-aA} - \frac{1}{a^2} e^{-aA} \\ &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

En effet : $A e^{-aA} = \frac{A}{(e^a)^A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées car $e^a > 1$.

On en déduit que I_1 est convergente de valeur $\frac{1}{a^2}$.

□

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de l'intégrale I_n .

Question a priori réservée aux cubes.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

• La fonction $x \mapsto x^n e^{-ax}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

• On obtient :

$$\times \forall x \in [1, +\infty[, x^n e^{-ax} > 0 \text{ et } \frac{1}{x^2} > 0$$

$$\times x^n e^{-ax} = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right). \text{ En effet :}$$

$$\frac{x^n e^{-ax}}{\frac{1}{x^2}} = x^{n+2} e^{-ax} = \frac{x^{n+2}}{(e^a)^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

par croissances comparées puisque $e^a > 1$ (car $a > 0$).

× L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ d'exposant 2 ($2 > 1$).

Elle est donc convergente.

Ainsi, par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} x^n e^{-ax} dx$ converge.

• La fonction $x \mapsto x^n e^{-ax}$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc $\int_0^1 x^n e^{-ax} dx$ est bien définie.

• On en conclut que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax} dx$ est convergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale impropre I_n converge.

□

4. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, aI_n = nI_{n-1}$.

Démonstration.

• La fonction $x \mapsto x^n e^{-ax}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

• Soit $A \geq 0$. On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = x^n & u'(x) = n x^{n-1} \\ v'(x) = e^{-ax} & v(x) = \frac{-1}{a} e^{-ax} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, A]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^A x^n e^{-ax} dx &= \frac{-1}{a} [x^n e^{-ax}]_0^A + \frac{n}{a} \int_0^A x^{n-1} e^{-ax} dx \\ &= \frac{-1}{a} (A^n e^{-aA} - 0) + \frac{n}{a} \int_0^A x^{n-1} e^{-ax} dx \\ &= \frac{-1}{a} A^n e^{-aA} + \frac{n}{a} \int_0^A x^{n-1} e^{-ax} dx \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{n}{a} I_{n-1} \end{aligned}$$

En effet : $A^n e^{-aA} = \frac{A^n}{(e^a)^A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées car $e^a > 1$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \frac{n}{a} I_{n-1}$.

Commentaire

On vérifie au passage que l'on a bien : $I_1 = \frac{1}{a} I_0 = \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2}$.

□

5. Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{n!}{a^{n+1}}$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : I_n = \frac{n!}{a^{n+1}}$.

► **Initialisation**

- D'une part : $I_0 = \frac{1}{a}$.
- D'autre part : $\frac{0!}{a^{0+1}} = \frac{1}{a}$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $I_{n+1} = \frac{(n+1)!}{a^{n+2}}$).

$$\begin{aligned}
 I_{n+1} &= \frac{n+1}{a} I_n && \text{(d'après la question 4.)} \\
 &= \frac{n+1}{a} \frac{n!}{a^{n+1}} && \text{(car par hypothèse de} \\
 &= \frac{(n+1)!}{a^{n+2}} && \text{récurrence : } I_n = \frac{n!}{a^{n+1}})
 \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{n!}{a^{n+1}}$.

□

VI. Séance 5 : intégrale fonction de ses bornes

Exercice 13

On considère la fonction $G : x \mapsto \int_x^{2x} \sqrt{1+t^4} dt$.

1. Donner l'ensemble de définition de G .

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x \geq 0$: la fonction $f : t \mapsto \sqrt{1+t^4}$ est continue sur le SEGMENT $[x, 2x]$.

Ainsi, l'intégrale $\int_x^{2x} \sqrt{1+t^4} dt$ est bien définie.

- Si $x \leq 0$: la fonction $f : t \mapsto \sqrt{1+t^4}$ est continue sur le SEGMENT $[2x, x]$.

Ainsi, l'intégrale $\int_x^{2x} \sqrt{1+t^4} dt$ est bien définie.

La quantité $G(x)$ étant définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction G a pour ensemble de définition \mathbb{R} . □

2. Montrer que pour tout $t \geq 0$: $t^2 \leq \sqrt{1+t^4} \leq 1+t^2$.

Démonstration.

Soit $t \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned} t^2 &\leq \sqrt{1+t^4} \leq 1+t^2 \\ \Leftrightarrow (t^2)^2 &\leq (\sqrt{1+t^4})^2 \leq (1+t^2)^2 && \text{(par stricte croissance de la fonction} \\ &&& \text{élévation au carré sur } [0, +\infty[) \\ \Leftrightarrow t^4 &\leq 1+t^4 \leq 1+2t^2+t^4 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 1 \leq 1+2t^2 \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant vérifiée, il en est de même de la première.

$$\forall t \geq 0, t^2 \leq \sqrt{1+t^4} \leq 1+t^2$$

□

3. En déduire un encadrement de $G(x)$, pour $x \in [0, +\infty[$.

Démonstration.

Soit $x \in [0, +\infty[$.

- D'après la question précédente, pour tout $t \geq 0$:

$$t^2 \leq \sqrt{1+t^4} \leq 1+t^2$$

Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x \leq 2x$ car $x \geq 0$) :

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} t^2 dt &\leq \int_x^{2x} \sqrt{1+t^4} dt \leq \int_x^{2x} (1+t^2) dt \\ \parallel & \qquad \qquad \qquad \parallel & \qquad \qquad \qquad \parallel \\ \left[\frac{t^3}{3} \right]_x^{2x} &\leq G(x) \leq \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_x^{2x} \end{aligned}$$

• Or :

$$\left[\frac{t^3}{3} \right]_x^{2x} = \frac{1}{3} [t^3]_x^{2x} = \frac{1}{3} ((2x)^3 - x^3) = \frac{1}{3} (8x^3 - x^3) = \frac{7}{3} x^3$$

$$\left[t + \frac{t^3}{3} \right]_x^{2x} = \left(2x + \frac{(2x)^3}{3} \right) - \left(x + \frac{x^3}{3} \right) = x + \frac{7}{3} x^3$$

On en déduit : $\forall x \geq 0, \frac{7}{3} x^3 \leq G(x) \leq x + \frac{7}{3} x^3$.

□

4. Montrer alors : $G(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{7}{3} x^3$.

Démonstration.

Soit $x > 0$.

• D'après la question précédente, on obtient par division par $\frac{7}{3} x^3 (> 0)$:

$$1 \leq \frac{G(x)}{\frac{7}{3} x^3} \leq \frac{x}{\frac{7}{3} x^3} + 1$$

• Or :

$$\times \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1,$$

$$\times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\frac{7}{3} x^3} + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{7x^2} + 1 = 1.$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, que $\frac{G(x)}{\frac{7}{3} x^3}$ admet pour limite 1 lorsque x tend vers $+\infty$.

$G(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{7}{3} x^3$

□

5. Démontrer que G réalise une bijection de \mathbb{R}_+ vers un intervalle à préciser.

Démonstration.

- La fonction $f : t \mapsto \sqrt{1+t^4}$ est continue sur \mathbb{R}_+ .
Elle admet donc une primitive F de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t) dt = [F(t)]_x^{2x} = F(2x) - F(x)$$

La fonction $G_1 : x \mapsto F(2x)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ car elle est la composée $G_1 = F \circ h$ où :

- × $h : x \mapsto 2x$ est :
 - de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ car polynomiale.
 - telle que : $h(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$.
- × F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .

La fonction G est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ car elle est la somme $G = G_1 - F$ de deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .

(le caractère dérivable est suffisant pour la question demandé comme on le voit ci-dessous)

- On obtient alors, pour tout $x \geq 0$:

$$G'(x) = 2 F'(2x) - F'(x) = 2 f(2x) - f(x) = 2 \sqrt{1 + (2x)^4} - \sqrt{1 + x^4} > 0$$

La fonction G est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

- La fonction G est :
 - × continue sur $[0, +\infty[$.
 - × strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $G([0, +\infty[)$ où :

$$G([0, +\infty[) = [G(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)[= [0, +\infty[$$

En effet :

- × $G(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0.$

- × $G(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{7}{3} x^3 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$

La fonction G réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. □

Exercice 14

On considère la fonction $H : x \mapsto \int_x^{2x} \exp(-t^2) dt.$

1. Déterminer l'ensemble de définition de H .

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x \geq 0$: la fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur le **SEGMENT** $[x, 2x]$.

Ainsi, l'intégrale $\int_x^{2x} e^{-t^2} dt$ est bien définie.

- Si $x < 0$: la fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur le **SEGMENT** $[2x, x]$.

Ainsi, l'intégrale $\int_x^{2x} e^{-t^2} dt$ est bien définie.

La quantité $H(x)$ étant définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction H a pour ensemble de définition \mathbb{R} . □

2. Démontrer que la fonction H est impaire.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la fonction H a pour ensemble de définition \mathbb{R} , ensemble symétrique par rapport à 0.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$H(-x) = \int_{-x}^{-2x} \exp(-t^2) dt = \int_x^{2x} \exp(-(-u)^2) (-du) = - \int_x^{2x} \exp(-u^2) du = -H(x)$$

La deuxième égalité est obtenue en effectuant le changement de variable $u = -t$.

$$\begin{aligned} & u = -t \quad (\text{et donc } t = -u) \\ & \Leftrightarrow du = -dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ & \bullet t = -x \Rightarrow u = x \\ & \bullet t = -2x \Rightarrow u = 2x \end{aligned}$$

Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto -u$ est de classe \mathcal{C}^1 sur le segment d'extrémités x et $2x$ ($[x, 2x]$ si $x \geq 0$ ou $[2x, x]$ si $x < 0$).

Ainsi, la fonction H est impaire sur \mathbb{R} .

□

3. Démontrer que la fonction H est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.
En déduire les variations de H .

Démonstration.

- La fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R} .
Elle admet donc une primitive F de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H(x) = \int_x^{2x} f(t) dt = [F(t)]_x^{2x} = F(2x) - F(x)$$

La fonction $U : x \mapsto F(2x)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} car elle est la composée de deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Ainsi, H est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} car elle est la somme $H = U - F$ de deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} H'(x) &= U'(x) - F'(x) \\ &= 2 \times F'(2x) - F'(x) \\ &= 2 \times f(2x) - f(x) \quad (\text{car } F \text{ est une primitive de } f) \\ &= 2 e^{-(2x)^2} - e^{-x^2} \\ &= 2 e^{-4x^2} - e^{-x^2} \end{aligned}$$

Commentaire

Il faut faire attention à l'écriture de ce passage. Le problème se situe généralement au moment de la dérivation de la fonction $U : x \mapsto F(2x)$. On trouve deux types d'erreurs.

1) Erreur dans l'application de la formule de dérivation d'une composée

$$U'(x) \not\equiv F'(2x)$$

On rappelle que le bon résultat est : $U'(x) = 2 \times F'(2x)$.

2) Erreur de notation

$$U'(x) \not\equiv (F(2x))'$$

Formellement, on ne peut écrire : $(F(2x))'$. Le symbole de dérivation « ' » est réservé à la dérivation de fonction. Ici, il est appliqué à une quantité. C'est un abus de notation qui est souvent toléré mais qui est un peu dangereux car, comme tout abus, il introduit une ambiguïté.

Nommer U la fonction $x \mapsto F(2x)$ est une bonne stratégie pour ne pas commettre ces erreurs même si cela a l'inconvénient d'introduire encore une nouvelle notation après avoir introduit f puis F .

- On détermine le signe de $H'(x)$ en raisonnant par équivalence.

$$\begin{aligned}
 & H'(x) > 0 \\
 \Leftrightarrow & 2 e^{-4x^2} > e^{-x^2} \\
 \Leftrightarrow & 2 e^{-3x^2} > 1 && \text{(en multipliant de part et d'autre par } e^{x^2} > 0\text{)} \\
 \Leftrightarrow & e^{-3x^2} > \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow & -3x^2 > \ln\left(\frac{1}{2}\right) && \text{(car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0, +\infty[\text{)} \\
 \Leftrightarrow & 3x^2 - \ln(2) < 0 && \text{(car } \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)\text{)} \\
 \Leftrightarrow & x^2 - \frac{\ln(2)}{3} < 0
 \end{aligned}$$

Le signe de la quantité $H'(x)$ est donc l'opposé du signe de la quantité polynomiale :

$$P(x) = x^2 - \frac{\ln(2)}{3} = \left(x - \sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}\right) \left(x + \sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}\right)$$

On en déduit le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}$	$\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}$	$+\infty$	
Signe de $P(x)$	+	0	-	0	+
Signe de $H'(x)$	-	0	+	0	-
Variations de H					

Commentaire

La fonction H étant impaire, on pouvait restreindre l'étude à $[0, +\infty[$ et déduire les variations de la fonction H sur $] -\infty, 0]$ par symétrie. □

4. a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $t \in [x, 2x]$: $\exp(-4x^2) \leq \exp(-t^2) \leq \exp(-x^2)$.

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $t \in [x, 2x]$:

$$x \leq t \leq 2x$$

donc $x^2 \leq t^2 \leq (2x)^2$ *(par croissance de la fonction élévation au carré sur \mathbb{R}_+)*

et $-x^2 \geq -t^2 \geq -4x^2$ *(par multiplication par $-1 < 0$)*

ainsi $\exp(-x^2) \geq \exp(-t^2) \geq \exp(-4x^2)$ *(par croissance de la fonction \exp sur \mathbb{R})*

Pour tout $t \in [x, 2x]$: $\exp(-4x^2) \leq \exp(-t^2) \leq \exp(-x^2)$. □

b) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}^+, x \exp(-4x^2) \leq H(x) \leq x \exp(-x^2)$.

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

- D'après la question précédente, pour tout $t \in [x, 2x]$:

$$\exp(-4x^2) \leq \exp(-t^2) \leq \exp(-x^2)$$

- Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x \leq 2x$ car $x \geq 0$) :

$$\int_x^{2x} \exp(-4x^2) dt \leq \int_x^{2x} \exp(-t^2) dt \leq \int_x^{2x} \exp(-x^2) dt$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ (2x - x) \exp(-4x^2) & H(x) & (2x - x) \exp(-x^2) \end{array}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+, x \exp(-4x^2) \leq H(x) \leq x \exp(-x^2)$

□

c) Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x)$.

Démonstration.

Soit $x \geq 0$.

- D'après la question précédente :

$$x \exp(-4x^2) \leq H(x) \leq x \exp(-x^2)$$

- Or :

$$\times \lim_{x \rightarrow +\infty} x \exp(-4x^2) = 0,$$

$$\times \lim_{x \rightarrow +\infty} x \exp(-x^2) = 0.$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $H(x)$ admet pour limite 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 0$

Commentaire

Le résultat : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \exp(-4x^2) = 0$ N'EST PAS directement un résultat de croissances comparées. On peut le démontrer en procédant comme suit :

$$x \exp(-4x^2) = \frac{x}{e^{4x^2}} = \frac{x}{e^x} \times \frac{e^x}{e^{4x^2}}$$

Or : $\frac{x}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées. Et : $\frac{e^x}{e^{4x^2}} = e^{x-4x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, on a bien : $x \exp(-4x^2) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

□

Exercice 15

On considère la fonction : $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$.

1. Démontrer que F est définie sur \mathbb{R} .

Justifier que F est dérivable sur \mathbb{R} , et calculer sa dérivée.

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x \geq 0$: la fonction $h : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur le SEGMENT $[0, x]$.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ est bien définie.

- Si $x \leq 0$: la fonction $h : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur le SEGMENT $[x, 0]$.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ est bien définie.

La quantité $F(x)$ étant définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction F a pour ensemble de définition \mathbb{R} .

- La fonction $h : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur \mathbb{R} .

Elle admet donc une primitive H de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_0^x h(t) dt = [H(t)]_0^x = H(x) - H(0)$$

La fonction F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} car la fonction H l'est.

- De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = H'(x) = h(x)$$

On en déduit : $F' = h$.

Commentaire

- On peut aussi rédiger en se servant du fait que la fonction F est la primitive de h sur \mathbb{R} qui s'annule au point 0. On en déduit alors immédiatement que F est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et : $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = h(x)$.
- L'intérêt de la démonstration adoptée dans la question est qu'elle est plus générale et peut donc être adaptée à tous les cas particuliers (comme on l'a vu dans les deux exercices précédents).
- Au passage, soulignons une erreur classique : la fonction $x \mapsto \int_x^{2x} \exp(-t^2) dt$ (exercice précédent) **N'EST PAS** une primitive de la fonction $t \mapsto \exp(-t^2)$ (attention aux bornes de l'intégrale !).

□

2. Montrer que F est impaire.

Démonstration.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{1}{1+(-u)^2} (-du) = - \int_0^x \frac{1}{1+u^2} du = -F(x)$$

• La deuxième égalité est obtenue en effectuant le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left| \begin{array}{l} u = -t \quad (\text{et donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet t = 0 \Rightarrow u = 0 \\ \bullet t = -x \Rightarrow u = x \end{array} \right.$$

Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto -u$ est de classe \mathcal{C}^1 sur le segment d'extrémités 0 et x ($[0, x]$ si $x \geq 0$ ou $[x, 0]$ si $x < 0$).

Ainsi, la fonction F est impaire sur \mathbb{R} .

□

3. Déterminer la monotonie de F .

Démonstration.

D'après la question 2., pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = h(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$$

Ainsi, la fonction F est strictement croissante sur \mathbb{R} .

□

4. Montrer : $\forall x \geq 1, \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq 1$.

Démonstration.

Soit $x \geq 1$.

• Pour tout $t \in [1, x]$:

$$\begin{aligned} t^2 &\leq 1+t^2 \\ \text{donc } \frac{1}{t^2} &\geq \frac{1}{1+t^2} \quad (\text{par décroissance de la fonction} \\ &\quad \text{inverse sur } \mathbb{R}_+^*) \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [1, x] : \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$.

• Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($1 \leq x$) :

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x = -\left[\frac{1}{t} \right]_1^x = -\left(\frac{1}{x} - 1 \right) = 1 - \frac{1}{x} \leq 1$$

Pour tout $x \geq 1 : \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq 1$.

□

5. En déduire que la fonction F admet une limite en $+\infty$.

Dans la suite, on note $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

Démonstration.

- La fonction F est croissante sur $] -\infty, +\infty[$.

Ainsi, d'après le théorème de la limite monotone, la fonction F admet une limite en $+\infty$.

- D'après la question 4., pour tout $x \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt \quad (\text{par la relation de Chasles } (*)) \\
 &\leq \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + 1 \quad (\text{d'après la question précédente}) \\
 &\leq \int_0^1 1 dt + 1 = 1 + 1 = 2 \quad (\text{car pour tout } t \in [0, 1] : \frac{1}{1+t^2} \leq 1 \text{ et} \\
 &\quad \text{par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant})
 \end{aligned}$$

La fonction F est donc majorée sur $[1, +\infty[$.

On en déduit, toujours d'après le théorème de la limite monotone, que la limite de F en $+\infty$ est finie. \square

6. On pose $G(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$.

a) Justifier que G est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et calculer G' . Que dire de G ?

Démonstration.

- La fonction $T : x \mapsto F\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ car elle est la composée $T = F \circ s$ où :

× $s : x \mapsto \frac{1}{x}$ est :

- dérivable sur $]0, +\infty[$.
- telle que $s(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.

× F dérivable sur \mathbb{R} .

Ainsi, la fonction G est dérivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que somme $G = F + T$ des fonctions F et T , toutes deux dérivables sur \mathbb{R}_+^* .

- Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
 G'(x) &= F'(x) + F'\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
 &= h(x) - h\left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x^2} \\
 &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \times \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0
 \end{aligned}$$

Pour tout $x > 0$, $G'(x) = 0$.

On en déduit que la fonction G est constante sur \mathbb{R}_+^* .

□

- b) En faisant tendre x vers $+\infty$, montrer que $L = 2F(1)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la fonction G est constante sur \mathbb{R}_+^* . On en déduit notamment :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, G(x) = G(1) = F(1) + F\left(\frac{1}{1}\right) = F(1) + F(1) = 2 F(1)$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, G(x) = 2 F(1)$

- En réécrivant la définition de la fonction G , on obtient pour tout $x > 0$:

$$2 F(1) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or :

$$\times \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = L.$$

$$\times \lim_{x \rightarrow +\infty} F\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0) = 0.$$

Les quantités présentes possédant toutes une limite finie en $+\infty$, on obtient, par passage à la limite :

$$\begin{array}{ccc}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 F(1)) & = & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\
 \parallel & & \parallel \\
 2 F(1) & & L
 \end{array}$$

Ainsi, on a bien : $L = 2 F(1)$.

□

VII. Séance 6 : séries numériques

Exercice 16

Déterminer (en la justifiant) la nature des séries suivantes.

$$1. \sum \frac{n}{2^n}$$

$$3. \sum \frac{\ln(n)}{n^2}$$

$$5. \sum \frac{(\sqrt{2})^n}{n!}$$

$$2. \sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^3}$$

$$4. \sum e^{-n}$$

$$6. \sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right)$$

MÉTHODO

Étude des séries numériques (PCSI)

Afin de déterminer la nature d'une série $\sum u_n$, on pourra penser à utiliser l'une des techniques listées ci-dessous.

1) Étude de la suite (u_n) réelle ou complexe

a) Si $u_n \not\rightarrow 0$ (ou $u_n \not\rightarrow 0$), la série $\sum u_n$ diverge grossièrement donc diverge.

b) Si $u_n \rightarrow 0$, la série $\sum u_n$ ne diverge pas grossièrement.

La série $\sum u_n$ peut être divergente ou convergente.

(une étude plus précise doit être réalisée)

C'est une première étude de la « taille » du terme général u_n de la série $\sum u_n$ étudiée.

2) Si $\sum u_n$ est à termes positifs (c'est-à-dire si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$)

On dispose des quatre outils suivants.

a) Critère de comparaison par inégalité des séries à termes positifs.

b) Critère de comparaison par équivalence des séries à termes positifs.

c) Critère de comparaison par négligeabilité des séries à termes positifs.

d) Critère de comparaison par domination des séries à termes positifs.

On estime ici plus précisément la « taille » du terme général u_n de la série $\sum u_n$ étudiée. Pour ce faire, on compare u_n au terme général v_n d'une série de référence. On pensera notamment :

× à comparer avec des séries de terme général $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$ dont la nature est donnée par le critère de Riemann.

(on pourra aussi penser à comparer au terme général d'une série géométrique ou au terme général de la série exponentielle ou plus généralement au terme général d'une série dont on a établi la nature précédemment)

× à utiliser la formule de Stirling (cf cours de 2^{ème} année) pour évaluer la taille d'un terme général faisant apparaître des factorielles.

Note : si $\sum u_n$ est à termes négatifs, on étudie $\sum -u_n$ qui est de même nature que $\sum u_n$.

3) Si $\sum u_n$ est à termes réels de signes non constants ou est à termes complexes

On pourra penser à l'une de ces méthodes.

a) Utilisation du critère spécial des séries alternées si le cadre s'y prête (cf cours de 2^{ème} année).

b) Démontrer de la convergence absolue (comme $|u_n| \geq 0$, les techniques du 2) sont utilisables)

• Si $\sum |u_n|$ est convergente (c'est-à-dire $\sum u_n$ absolument convergente) alors $\sum u_n$ est convergente.

• Si $\sum |u_n|$ est divergente alors $\sum u_n$ peut être divergente ou convergente (une étude plus précise doit être réalisée).

Démonstration.

1. (i) $\left| \frac{n}{2^n} \right| = \frac{n}{2^n} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$

(ii) La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Ainsi, par théorème de négligeabilité des séries à termes positifs, la série $\sum \frac{n}{2^n}$ est (absolument) convergente.

2. (i) $\left| \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^3} \right| = \frac{\ln(n)}{n^3} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$

(ii) La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Ainsi, par théorème de négligeabilité des séries à termes positifs, la série $\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^3}$ est (absolument) convergente.

3. (i) $\left| \frac{\ln(n)}{n^2} \right| = \frac{\ln(n)}{n^2} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \right)$

(ii) La série $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant $\frac{3}{2}$ (> 1).

Ainsi, par théorème de négligeabilité des séries à termes positifs, la série $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ est (absolument) convergente.

4. La série $\sum e^{-n}$ est convergente en tant que série géométrique de raison $\frac{1}{e}$ car $\left| \frac{1}{e} \right| < 1$.

5. La série $\sum \frac{(\sqrt{2})^n}{n!}$ est convergente en tant que série exponentielle de paramètre $\sqrt{2}$.

6. (i) $\left| \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right) \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$

(ii) La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Ainsi, par théorème d'équivalences des séries à termes positifs, la série $\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right)$ est (absolument) convergente.

□

VIII. Séance 7 : sommes de Riemann

Commentaire

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} g(k)$ (où g est une fonction continue sur $[0, +\infty[$).

- Vouloir exprimer S_n comme une somme de Riemann, c'est chercher à transformer l'expression de S_n pour l'écrire de la façon suivante :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où f est une fonction continue sur $[0, 1]$.

De manière plus générale, on peut chercher à écrire S_n sous la forme :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

on peut cependant toujours se placer dans le cas précédent où $a = 0$ et $b = 1$.

- Pour effectuer cette transformation, on commence **toujours** par forcer l'apparition du terme $\frac{k}{n}$. On écrira par exemple :

$$\times k = \frac{k}{n} \times n$$

$$\times k^2 = \left(\frac{k}{n} \times n\right)^2 = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \times n^2$$

$$\times \ln(k) = \ln\left(\frac{k}{n} \times n\right) = \ln\left(\frac{k}{n}\right) + \ln(n)$$

Il ne reste ensuite qu'à sortir les termes ne faisant pas intervenir $\frac{k}{n}$ de la somme.

Exercice 17

1. Pour tout entier n non nul, on pose : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n+k}$.

Transformer S_n pour l'exprimer comme une somme de Riemann puis conclure sur la convergence de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\cancel{n} \frac{1}{n} + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où la fonction f est définie par $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

On reconnaît une somme de Riemann. On en conclut :

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(|1+x|)]_0^1 = \ln(|2|) - \cancel{\ln(1)} = \ln(2)$$

On en déduit que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente, de limite $\ln(2)$.

□

2. En procédant de même, étudier le comportement en $+\infty$ de la suite de terme général :

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\ln(k+n) - \ln(n))$$

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\ln(k+n) - \ln(n)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+n}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\cancel{x} \frac{\frac{k}{n} + 1}{\cancel{x}}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

où la fonction f est définie par $f : x \mapsto \ln(1+x)$.

On reconnaît une somme de Riemann. On en conclut :

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \ln(1+x) dx$$

On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = \ln(1+x) & u'(x) = \frac{1}{1+x} \\ v'(x) = 1 & v(x) = x \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$.

On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= [x \ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx \\ &= (\ln(2) - 0) - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx \\ &= \ln(2) - \int_0^1 \frac{(1+x) - 1}{1+x} dx \\ &= \ln(2) - \int_0^1 \frac{1+x}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= \ln(2) - \int_0^1 1 dx + \ln(2) = 2 \ln(2) - 1 \end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente, de limite $2 \ln(2) - 1$.

□

Exercice 18

On considère de nouveau : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n+k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On admet que (cf TP sur les sommes de Riemann) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - S_n \right| \leq \frac{1}{2n}$$

1. Déterminer un entier n_0 tel que : $\left| \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - S_{n_0} \right| \leq 10^{-4}$.

Démonstration.

- On cherche ici à trouver un rang n_0 tel que S_{n_0} est une valeur approchée de $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ à 10^{-4} près. Autrement dit, on souhaite exhiber n_0 tel que :

$$\left| \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - S_{n_0} \right| \leq 10^{-4}$$

- Pour que cette inégalité soit vérifiée, il suffit de trouver n_0 tel que : $\frac{1}{2n_0} \leq 10^{-4}$.
En effet, d'après la question précédente, on aura alors, par transitivité :

$$\left| \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - S_{n_0} \right| \leq \frac{1}{2n_0} \leq 10^{-4}$$

- Or on a :

$$\frac{1}{2n_0} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow 10^4 \leq 2n_0 \Leftrightarrow n_0 \geq 5 \times 10^3$$

$$n_0 = 5 \times 10^3$$

□

2. Dédurre de cette inégalité un programme **Python** permettant de déterminer une valeur approchée de $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ à 10^{-4} près.

Démonstration.

D'après la question précédente, il suffit de calculer S_{n_0} avec $n_0 = 5 \times 10^3$.

```

1  n = 5 * 10**3
2  S = 0
3  for k in range(1, n+1) :
4      S = S + n / (n+k)
5  S = S / n
6  print(S)
```

□

3. Exécuter votre programme sur votre ordinateur. Quelle valeur obtient-on ? Commenter.

Démonstration.

On obtient : 0.6930971830599437.

C'est bien une valeur approchée de $\ln(2)$.

Python fournit 0.6931471805599453 comme valeur (approchée) pour `np.log(2)` (ne pas oublier d'ajouter l'instruction en début de programme `import numpy as np`).

Le programme précédent semble bien fournir une valeur approchée de $\ln(2)$.

□

Commentaire

- Dans cet exercice, on demande de déterminer une valeur approchée de $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.
- Cette demande est assez artificielle car on connaît la valeur exacte de cette intégrale ($\ln(2)$). En réalité, ce type de méthode est utilisée pour obtenir des valeurs approchées d'intégrales dont on ne connaît pas la valeur.

Exercice 19

On considère la suite (T_n) de terme général :

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n \sqrt{n^2 + k^2}}$$

1. Démontrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer la valeur de sa limite.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord :

$$\frac{k}{n \sqrt{n^2 + k^2}} = \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{n^2 + k^2}} = \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{n^2 \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}} = \frac{1}{n} \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

Notons $g : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Le terme T_n apparaît comme une somme de Riemann.

$$\text{On a alors : } T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g(x) dx$$

Enfin, on a :

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = \sqrt{2} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1$$

$$T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2} - 1$$

□

2. Écrire en **Python** une fonction `sommeR` qui :

× prend en paramètre une variable `n`,

× stocke dans une variable de sortie `T` la valeur du terme de rang `n` de la suite (T_n) .

Démonstration.

On pouvait commencer par coder `g` puis écrire `sommeR` :

```

1 def g(x) :
2     y = x / sqrt(1 + x**2)
3     return y

```

```

1 def sommeR(n)
2     T = 0
3     for k in range(1, n+1)
4         T = T + g(k/n)
5     T = T / n
6     return T

```

On peut aussi tout faire en une fois :

```

1 def sommeR(n)
2     T = 0
3     for k in range(1, n+1)
4         T = T + k / (n * np.sqrt(n**2 + k**2))
5     return T

```

□

IX. Séance 8 : comparaison séries / intégrales

Exercice 20

1. On considère dans la suite une fonction f continue et décroissante sur \mathbb{R} .

a) Montrer : $\forall k \geq 1, f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$.

Faire apparaître sur une même représentation graphique ces trois quantités sous forme d'aires. (cela ne constitue pas une démonstration)

Démonstration.

Soit $k \geq 1$. Soit $t \in [k, k+1]$ (autrement dit : $k \leq t \leq k+1$).

Comme f est décroissante, on a :

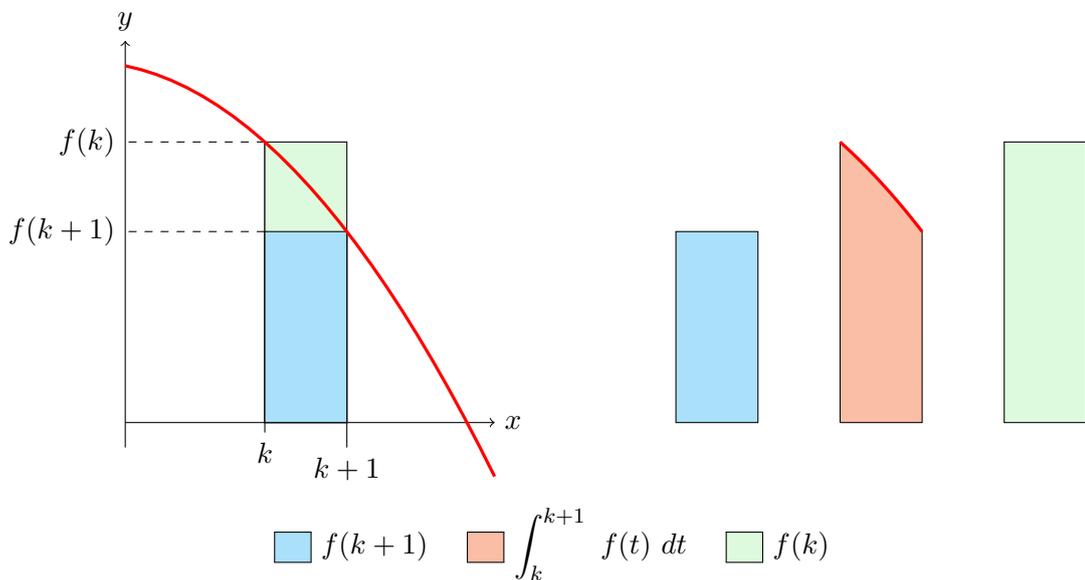
$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$$

Ainsi, par croissance de l'intégration (les bornes sont bien ordonnées : $k \leq k+1$) :

$$\int_k^{k+1} f(k+1) dt \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} f(k) dt$$

$$f(k+1) = ((k+1) - k) f(k+1) \qquad \qquad \qquad ((k+1) - k) f(k) = f(k)$$

$$\forall k \geq 1, f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$$



□

b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k)$$

Faire apparaître sur une nouvelle représentation graphique ces trois quantités sous forme d'aires. (cela ne constitue pas une démonstration)

Démonstration.

Soit $n \geq 1$. En sommant les inégalités de la question précédente, on obtient :

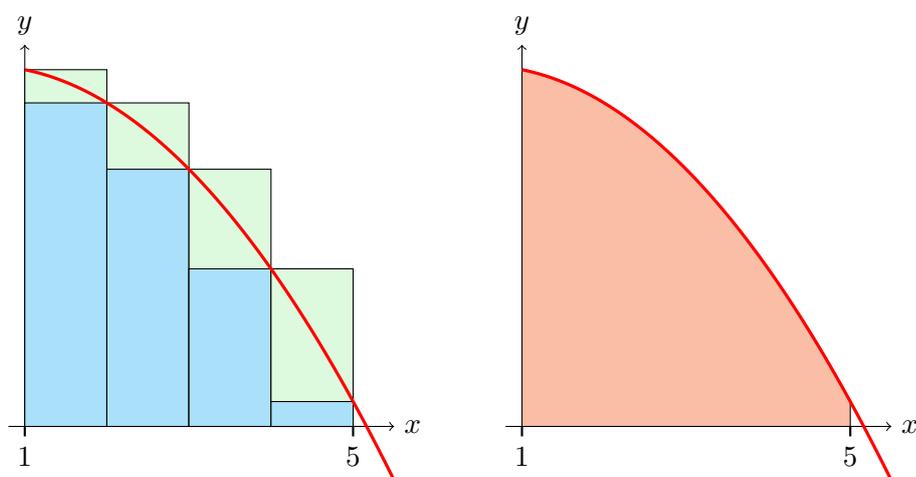
$$\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k)$$

$$\parallel \qquad \qquad \parallel$$

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \qquad \int_1^{n+1} f(t) dt$$

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k)$$

Représentation graphique : avec $n = 4$



$$\color{blue}\square \sum_{k=2}^5 f(k) \quad \color{orange}\square \int_1^5 f(t) dt \quad \color{green}\square \sum_{k=1}^4 f(k)$$

□

c) Démontrer enfin que, pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\int_2^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(t) dt$$

Démonstration.

Soit $k \geq 2$. Soit $t \in [k, k+1]$. On a : $t-1 \leq k \leq t$.

Comme f est décroissante, on a :

$$f(t) \leq f(k) \leq f(t-1)$$

Ainsi, on a :

$$\int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} f(k) dt \leq \int_k^{k+1} f(t-1) dt$$

$$\parallel \qquad \qquad \parallel$$

$$((k+1) - k) f(k) \qquad \int_{k-1}^k f(u) du$$

(le calcul de droite est obtenu par le changement de variable $u = t - 1$)

Par sommation de ces inégalités, on obtient :

$$\sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \sum_{k=2}^n f(k) \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k f(t) dt$$

$$\int_2^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(t) dt$$

$$\forall n \geq 2, \int_2^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(t) dt$$

□

2. On considère maintenant la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$.

a) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n)$$

Démonstration.

- Notons tout d'abord que $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante et continue sur $[1, +\infty[$.
- Soit $n \geq 2$. D'après la question **1.c)**, on a :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt$$

$$\ln(n+1) - \ln(2) = [\ln(|t|)]_2^{n+1} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq [\ln(|t|)]_1^n = \ln(n) - \ln(1)$$

- Si $n = 1$, alors, par convention : $\sum_{k=2}^1 \frac{1}{k} = 0$

Or $\ln(1+1) - \ln(2) = 0$ et $\ln(1) = 0$. Donc on a toujours :

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n)$$

$$\forall n \geq 1, \ln(n+1) - \ln(2) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n)$$

□

b) En déduire un encadrement de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Démonstration.

Soit $n \geq 1$.

- On remarque : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$.
- D'après la question précédente, on a :

$$1 + \ln(n+1) - \ln(2) \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

D'où :

$$\ln(n+1) + 1 - \ln(2) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

$$\forall n \geq 1, \ln(n+1) + 1 - \ln(2) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

□

c) En déduire : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Démonstration.

D'après la question précédente, on a :

$$\frac{\ln(n+1) + 1 - \ln(2)}{\ln(n)} \leq \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln(n)} \leq \frac{1 + \ln(n)}{\ln(n)} = \frac{1}{\ln(n)} + 1$$

• Étudions le membre de gauche.

× Tout d'abord :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

× Ensuite : $\frac{1 - \ln(2)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Ainsi : $\frac{\ln(n+1) + 1 - \ln(2)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

• Étudions le membre de droite.

$\frac{1}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $1 + \frac{1}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

On en déduit, par le théorème d'encadrement : $\frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Ainsi, on a : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

□

d) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$?

Démonstration.

Comme $\ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, on a, d'après la question précédente, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est donc divergente.

□

3. On considère maintenant la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)}$ sur $[2, +\infty[$.

a) Soit $n \geq 1$. Calculer $\int_2^{n+1} \frac{1}{x \ln(x)} dx$.

Démonstration.

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_2^{n+1} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = [\ln(|\ln x|)]_2^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)).$$

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{x \ln(x)} dx = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$$

□

b) À l'aide de ce qui précède, comparer $\int_2^{n+1} \frac{1}{x \ln(x)} dx$ et $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$.

Démonstration.

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ est décroissante sur $[2, +\infty[$.

En effet, elle est dérivable (même de classe \mathcal{C}^∞) sur $[2, +\infty[$ en tant qu'inverse de la fonction $x \mapsto x \ln(x)$:

× dérivable (même de classe \mathcal{C}^∞) sur $[2, +\infty[$ par produit de fonctions dérivables (même de classe \mathcal{C}^∞) sur $[2, +\infty[$.

× et qui ne s'annule pas sur $[2, +\infty[$.

Et pour tout $x \geq 2$, on a : $f'(x) = -\frac{1 + \ln(x)}{(x \ln(x))^2} \leq 0$.

Ainsi, d'après la question **1.c)**, on a : $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \geq \int_2^{n+1} \frac{1}{x \ln(x)} dx$.

□

c) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$.

Démonstration.

D'après les questions précédentes, on a :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \geq \int_2^{n+1} \frac{1}{x \ln(x)} dx = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$$

Or, par théorème de composition des limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\ln(n+1)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\ln(n)) = +\infty$.

Ainsi, $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ est donc divergente.

□

d) Écrire en **Python** une fonction `sommeSI` qui :

× prend en paramètre une variable `n`,

× stocke dans une variable de sortie `S` la valeur de $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$.

Démonstration.

```

1 import numpy as np
2
3 def sommeSI(n) :
4     S = 0
5     for k in range(2, n+1) :
6         S = S + 1 / (k * np.log(k))
7     return S
    
```

□