

DS6



On traitera **OBLIGATOIREMENT** les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 1. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. Déterminer les racines carrées de $-5 + 4i$.
2. (*) On note : $F = \{P \in \mathbb{K}_3[X] \mid P(0) = P(1)\}$.
Démontrer que F est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et en déterminer une base et sa dimension.

Exercice 2

On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

3. a) Calculer $(A - 2I)(A - I)^2$.
b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .
4. On note : $E_2(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2 \cdot X\}$.
Déterminer $E_2(A)$.
5. On note : $E_1(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$.
Déterminer $E_1(A)$.
6. On note : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.
b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^nP^{-1}$.
7. a) Exhiber une matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = D + N$, où :
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
c) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Déterminer T^n en fonction des matrices D et N , à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Exercice 3

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

8. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
9. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b , telles que $0 < a < 1 < b$.
10. Montrer : $b \in [2, 4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,7$.

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

11. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [b, +\infty[$.
12. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
13. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b)$.
b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
14. a) Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n .
b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```

1  def valeur_approchee(epsilon) :
2      n = 0
3      while .....
4          n = n + 1
5      return suite(n)

```

Exercice 4

On considère la fonction φ suivante :

$$\varphi : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x-1}$$

15. Déterminer le domaine de définition de φ .
16. Justifier que φ est prolongeable par continuité sur $]0, +\infty[$. On notera à nouveau φ la fonction ainsi prolongée.
- On considère la fonction $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$.
17. Justifier que $f : x \mapsto e^{\varphi(x+1)}$. En déduire le domaine de définition de f .
18. Justifier que f est dérivable sur $] -1, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
19. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction :

$$x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x} - 1$$

20. Démontrer :

$$f(x) = e - e \frac{x}{2} + e \frac{11}{24} x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

21. En déduire la limite de la fonction f en 0. On prolonge f par cette valeur en 0.

22. Montrer que f ainsi prolongée est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

23. Déterminer un équivalent de $f(x) - e$ lorsque x tend vers 0.

Problème

La partie II est indépendante des autres parties.

Partie I : Polynômes de Tchebychev.

On définit une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\begin{cases} T_0(X) = 1 \\ T_1(X) = X \\ \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2}(X) = 2X T_{n+1}(X) - T_n(X) \end{cases}$$

24. Expliciter T_2, T_3 .

25. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est de degré n et que le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} .
On pourra effectuer une récurrence forte.

26. Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$: $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos(a) \cos(b)$.

27. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

28. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(0)$ et $T_n(1)$.

29. Montrer, pour tout $\theta \in]0, \pi[$:

$$T'_n(\cos(\theta)) = \frac{n \sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$$

30. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $T'_n(1) = n^2$.

Partie II : Une série numérique.

On considère les suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad I_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2}$$

31. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n - 1 \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}$.

32. Montrer qu'il existe des réels a, b tels que pour tout entier $k \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$, $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{(k-1)}$.

En déduire une expression simple, pour tout entier $n \geq 2$, de $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}$.

33. Dédire de deux questions précédentes pour tout entier $n \geq 2$: $S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

34. Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On note sa limite ℓ .

35. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_{2n} = I_n + \frac{1}{4}S_n$.

36. En déduire que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{3}{4}\ell$.

Partie III : Calcul de la limite.

L'objet de cette partie est de calculer la limite ℓ .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$.

37. Démontrer : $T_n(X) = 2^{n-1}(X - x_1) \times \cdots \times (X - x_n)$.
On pourra calculer, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $T_n(x_k)$.

38. Soit I un intervalle ne contenant pas $x_1, \dots, x_n$. Démontrer :

$$\forall x \in I, \quad \frac{T'_n(x)}{T_n(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - x_k}$$

39. En déduire :

$$n^2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right)}$$

40. En exprimant $\frac{1}{\tan^2}$ uniquement en fonction de $\sin^2$, démontrer :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right)} = n^2 - \frac{n}{2}$$

41. Justifier : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \leq x \leq \tan x$.
En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2n^2 - n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right)^2} \leq 2n^2$$

42. Conclure : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{\pi^2}{8}$. Puis déterminer ℓ .