

DS5



On traitera **OBLIGATOIREMENT** les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 5. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. (*) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrer : $\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4, \left. \begin{array}{l} a \equiv b [p] \\ c \equiv d [p] \end{array} \right\} \Rightarrow ac \equiv bd [p]$.

Démonstration.

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$.

Supposons : $\left\{ \begin{array}{l} a \equiv b [p] \\ c \equiv d [p] \end{array} \right.$. Démontrons : $ac \equiv bd [p]$, i.e. $p \mid (ac - bd)$.

- Tout d'abord :
 - × comme : $a \equiv b [p]$, alors : $p \mid (a - b)$,
 - × comme $c \equiv d [p]$, alors : $p \mid (c - d)$.
- On en déduit que p divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de $(a - b)$ et $(c - d)$.
En particulier, puisque : $(b, c) \in \mathbb{Z}^2$, alors :

$$p \mid (c \times (a - b) + b \times (c - d))$$

$$\text{Or : } c \times (a - b) + b \times (c - d) = ac - \cancel{bc} + \cancel{bc} - bd = ac - bd.$$

On en conclut : $p \mid (ac - bd)$.

$$\text{Finalement : } \forall (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4, \left\{ \begin{array}{l} a \equiv b [p] \\ c \equiv d [p] \end{array} \right\} \Rightarrow ac \equiv bd [p].$$

□

2. Déterminer le PGCD de 2772 et 12870 :

- a) par algorithme d'Euclide,
- b) par décomposition en facteurs premiers.

Démonstration.

a) On effectue la division euclidienne de 12870 par 2772.

$$\left\{ \begin{array}{l} 12870 = 2772 \times 4 + 1782 \\ 0 \leq 1782 < 2772 \end{array} \right.$$

On effectue la division euclidienne de 2772 par 1782.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2772 = 1782 \times 1 + 990 \\ 0 \leq 990 < 1782 \end{array} \right.$$

On effectue la division euclidienne de 1782 par 990.

$$\left\{ \begin{array}{l} 1782 = 990 \times 1 + 792 \\ 0 \leq 792 < 990 \end{array} \right.$$

On effectue la division euclidienne de 990 par 792.

$$\begin{cases} 990 = 792 \times 1 + 198 \\ 0 \leq 198 < 792 \end{cases}$$

On effectue la division euclidienne de 792 par 198.

$$\begin{cases} 792 = 198 \times 4 + 0 \\ 0 \leq 0 < 198 \end{cases}$$

Par algorithme d'Euclide : $2772 \wedge 12870 = 198$.

b) On remarque :

× d'une part :

$$2772 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11 = 2^2 \times 3^2 \times 5^0 \times 7^1 \times 11^1 \times 13^0$$

× d'autre part :

$$12870 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 11 \times 13 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^0 \times 11^1 \times 13^1$$

On en déduit : $2772 \wedge 12870 = 2^1 \times 3^2 \times 5^0 \times 7^0 \times 11^1 \times 13^0 = 198$.

□

3. (*) Résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} 3x & + & 2z & = & 0 \\ & 3y & + & z & + & 3t = 0 \\ x & + & y & + & z & + & t = 0 \\ 2x & - & y & + & z & - & t = 0 \end{cases}$$

Démonstration.

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x & + & 2z & = & 0 \\ & 3y & + & z & + & 3t = 0 \\ x & + & y & + & z & + & t = 0 \\ 2x & - & y & + & z & - & t = 0 \end{cases} & \xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow 3L_4 - 2L_1} \begin{cases} 3x & + & 2z & = & 0 \\ & 3y & + & z & + & 3t = 0 \\ & 3y & + & z & + & 3t = 0 \\ -3y & - & z & - & 3t = 0 \end{cases} \\ & \xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2} \begin{cases} 3x & + & 2z & = & 0 \\ & 3y & + & z & + & 3t = 0 \\ & & & 0 & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{cases} \\ & \xLeftrightarrow{} \begin{cases} 3x & = & -2z \\ & 3y & = & -z - 3t \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions du système est :

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid x = -\frac{2}{3} z \text{ ET } y = -\frac{1}{3} z - t \} \\ &= \left\{ \left(-\frac{2}{3} z, -\frac{1}{3} z - t, z, t \right) \mid (z, t) \in \mathbb{K}^2 \right\} \\ &= \left\{ z \cdot \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0 \right) + t \cdot (0, -1, 0, 1) \mid (z, t) \in \mathbb{K}^2 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0 \right), (0, -1, 0, 1) \right)\end{aligned}$$

$\mathcal{S} = \text{Vect} \left(\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0 \right), (0, -1, 0, 1) \right)$

□

Exercice 2

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n} \end{cases}$$

4. Exprimer u_1 et u_2 en fonction de u_0 .

Démonstration.

- Tout d'abord, u_1 est bien définie car $0+1+u_0 \geq 0$ (car $u_0 \in \mathbb{R}_+$). De plus :

$$u_1 = \sqrt{0+1+u_0} = \sqrt{1+u_0}$$

- Ensuite, u_2 est bien définie car $1+1+u_1 \geq 0$ (car $u_1 = \sqrt{1+u_0} \geq 0$) :

$$u_2 = \sqrt{1+1+u_1} = \sqrt{2+\sqrt{1+u_0}}$$

Les quantités u_1 et u_2 sont bien définies et :

$$u_1 = \sqrt{1+u_0} \quad u_2 = \sqrt{2+\sqrt{1+u_0}}$$

□

5. (*) Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \begin{cases} u_n \text{ bien définie} \\ u_n \geq 0 \end{cases}$

► **Initialisation**

D'après l'énoncé, u_0 existe et : $u_0 \geq 0$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $\begin{cases} u_{n+1} \text{ bien définie} \\ u_{n+1} \geq 0 \end{cases}$).

- Par hypothèse de récurrence, la quantité u_n existe et : $u_n \geq 0$.

On en déduit : $n+1+u_n \geq 0$. Ainsi $\sqrt{n+1+u_n}$ est bien définie, et donc u_{n+1} aussi.

- De plus :

$$n+1+u_n \geq 0$$

$$\text{donc } \sqrt{n+1+u_n} \geq 0 \quad (\text{par croissance de } \sqrt{\cdot} \text{ sur } \mathbb{R}_+)$$

$$\text{d'où } u_{n+1} \geq 0$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, la suite (u_n) est bien définie : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

□

6. Démontrer : $\forall a \in \mathbb{R}_+, \sqrt{a} \leq \frac{1}{2} (1 + a)$.

Démonstration.

La fonction $h : x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.

Sa courbe représentative se situe donc au-dessus de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 1. Or cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= h(1) + h'(1)(x - 1) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{1}{2}(x + 1) \end{aligned}$$

On en déduit : $\forall a \in \mathbb{R}_+, \sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(x + 1)$.

Commentaire

- Le membre de droite de l'inégalité souhaitée est une fonction polynomiale de degré 1. Sa représentation graphique est donc une droite. C'est ce constat qui doit faire penser à une inégalité de convexité.
- Si on ne pense pas à utiliser une propriété de convexité, on peut aussi résoudre cette question en étudiant le signe de la fonction $a \mapsto \sqrt{a} - \frac{1}{2}(1 + a)$.

7. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n} \leq u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$.

En déduire la limite de la suite (u_n) .

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \sqrt{n} \leq u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$.

► Initialisation

× D'une part, d'après l'énoncé : $u_0 \geq 0$.

× D'autre part : $0 + \frac{u_0}{2^0} = u_0$.

Ainsi : $\sqrt{0} \leq u_0 \leq 0 + \frac{u_0}{2^0}$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $\sqrt{n+1} \leq u_{n+1} \leq n+1 + \frac{u_0}{2^{n+1}}$).

- Tout d'abord, d'après 5 : $u_n \geq 0$ Ainsi :

$$\begin{aligned} n+1 &\leq n+1+u_n \\ \text{donc } \sqrt{n+1} &\leq \sqrt{n+1+u_n} \quad (\text{par croissance de } \sqrt{\cdot} \text{ sur } \mathbb{R}_+) \\ \text{d'où } \sqrt{n+1} &\leq u_{n+1} \end{aligned}$$

- D'après la question précédente appliquée à $a = n+1+u_n \in \mathbb{R}_+$, on obtient :

$$u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n} \leq \frac{1}{2} (1 + (n+1+u_n))$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &\leq \frac{1}{2} (n+2+u_n) \\
 &\leq \frac{1}{2} \left(n+2 + \left(n + \frac{u_0}{2^n} \right) \right) \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\
 &= \frac{1}{2} \left(2n+2 + \frac{u_0}{2^n} \right) \\
 &= n+1 + \frac{u_0}{2^{n+1}}
 \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n} \leq u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$.

On remarque :

- × $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$,
- × $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Par théorème de comparaison : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

□

8. Justifier : $u_{n-1} = o(n)$.

Démonstration.

Soit $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$.

- Tout d'abord, par définition de u_{n-1} :

$$u_{n-1} = \sqrt{(n-2) + 1 + u_{n-2}} = \sqrt{n-1 + u_{n-2}}$$

- Or, d'après la question précédente :

$$\sqrt{n-2} \leq u_{n-2} \leq n-2 + \frac{u_0}{2^{n-2}}$$

$$\text{donc } n-1 + \sqrt{n-2} \leq n-1 + u_{n-2} \leq 2n-3 + \frac{u_0}{2^{n-2}}$$

$$\text{d'où } \sqrt{n-1 + \sqrt{n-2}} \leq \sqrt{n-1 + u_{n-2}} \leq \sqrt{2n-3 + \frac{u_0}{2^{n-2}}} \quad (\text{par croissance de } \sqrt{\cdot} \text{ sur } \mathbb{R}_+)$$

$$\text{ainsi } \sqrt{n-1 + \sqrt{n-2}} \leq u_{n-1} \leq \sqrt{2n-3 + \frac{u_0}{2^{n-2}}}$$

$$\text{alors } \frac{\sqrt{n-1 + \sqrt{n-2}}}{n} \leq \frac{u_{n-1}}{n} \leq \frac{\sqrt{2n-3 + \frac{u_0}{2^{n-2}}}}{n}$$

- Or :

× d'une part :

$$\frac{\sqrt{n-1 + \sqrt{n-2}}}{n} = \sqrt{\frac{n-1 + \sqrt{n-2}}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt{n-2}}{n^2}}$$

De plus : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt{n-2}}{n^2} = 0$.

Ainsi, par continuité de $\sqrt{\cdot}$ en 0 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt{n-2}}{n^2}} = 0$. D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2}}{n} = 0$$

× d'autre part :

$$\frac{\sqrt{2n-3 + \frac{u_0}{2^{n-2}}}}{n} = \sqrt{\frac{2n-3 + \frac{u_0}{2^{n-2}}}{n^2}} = \sqrt{2 \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{u_0}{n^2 2^{n-2}}}$$

De plus : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{u_0}{n^2 2^{n-2}} = 0$.

Par continuité de $\sqrt{\cdot}$ en 0 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2 \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{u_0}{n^2 2^{n-2}}} = 0$. D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2n-3 + \frac{u_0}{2^{n-2}}}}{n} = 0$$

Par théorème d'encadrement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n-1}}{n} = 0$. Autrement dit : $u_{n-1} = o_{n \rightarrow +\infty}(n)$.

□

9. a) Démontrer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(u_n)^2}{n} = 1$.

On pourra utiliser la question précédente ainsi que la relation qui définit u_n en fonction de u_{n-1} .

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de u_n :

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n + u_{n-1}} \\ \text{donc } (u_n)^2 &= n + u_{n-1} \\ \text{d'où } \frac{(u_n)^2}{n} &= \frac{n + u_{n-1}}{n} \\ \text{ainsi } \frac{(u_n)^2}{n} &= 1 + \frac{u_{n-1}}{n} \end{aligned}$$

- Or, d'après la question précédente : $u_{n-1} = o_{n \rightarrow +\infty}(n)$. Autrement dit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n-1}}{n} = 0$.

On en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(u_n)^2}{n} = 1 + 0 = 1$.

□

b) En déduire : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}$.

Démonstration.

D'après la question précédente : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(u_n)^2}{n} = 1$.

Ainsi, par continuité de $\sqrt{\cdot}$ en 1 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{(u_n)^2}{n}} = \sqrt{1} = 1$. On obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1$

Autrement dit : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}$.

□

10. On introduit la suite (v_n) en posant : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \sqrt{n}$. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{u_{n-1}}{u_n + \sqrt{n}}$$

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \frac{u_{n-1}}{u_n + \sqrt{n}} &= \frac{(u_n)^2 - n}{u_n + \sqrt{n}} && (\text{car } u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}) \\ &= \frac{(u_n - \sqrt{n})(\cancel{u_n + \sqrt{n}})}{\cancel{u_n + \sqrt{n}}} \\ &= u_n - \sqrt{n} = v_n \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{u_{n-1}}{u_n + \sqrt{n}}$

□

11. Démontrer : $u_n + \sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{u_n + \sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \frac{u_n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}$$

Or, d'après **9b** : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}$. Autrement dit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1$. D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n + \sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} = 1$$

On en déduit : $u_n + \sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

□

12. Établir que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$v_n = \frac{u_{n-1}}{u_n + \sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_{n-1}}{2\sqrt{n}}$$

- De plus, d'après la question **9b** : $u_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n-1}$. On obtient :

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}}$$

- Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$$

On sait de plus : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$. Ainsi, par continuité de $\sqrt{\cdot}$ en 1 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \sqrt{1} = \frac{1}{2}$$

- Enfin, deux suites équivalentes ont même limite. On en déduit que (v_n) converge et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$$

La suite (v_n) converge et : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

□

13. Montrer que la suite (v_n) est croissante à partir d'un certain rang.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - \frac{1}{2} = 0$. Autrement dit : $v_n - \frac{1}{2} = o_{n \rightarrow +\infty}(1)$. Ainsi :

$$u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{n+1} + \cancel{\frac{1}{2}} + o_{n \rightarrow +\infty}(1) - \left(\sqrt{n} + \cancel{\frac{1}{2}} + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \right) \\ &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \\ &= \sqrt{n} \left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} - 1 \right) + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \\ &= \sqrt{n} \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 \right) + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \\ &= \sqrt{n} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \end{aligned}$$

- On obtient :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \right) \quad \left(\text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}} \end{aligned}$$

On remarque : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2\sqrt{n}} > 0$. Or deux suites équivalentes ont même signe à partir d'un certain rang. La suite $(u_{n+1} - u_n)$ est donc positive à partir d'un certain rang.

On en déduit que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

□

Exercice 3 : Théorèmes de point fixe

On étudie ici deux théorèmes donnant l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une fonction f lipschitzienne (la définition est donnée plus bas).

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$. Soit f une fonction définie sur le segment $[a, b]$ et à valeurs dans le segment $[a, b]$.

Théorème du point fixe de Picard

Soit $k \in]0, 1[$. On suppose que la fonction f est k -lipschitzienne, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad |f(y) - f(x)| \leq k |y - x|$$

14. Démontrer que la fonction f est continue sur $[a, b]$.

Démonstration.

Il s'agit de démontrer que, pour tout $x_0 \in [a, b]$, la fonction f est continue en x_0 . Autrement dit :

$$\forall x_0 \in [a, b], \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in [a, b], (|x - x_0| \leq \alpha) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon)$$

Soit $x_0 \in [a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$.

On note : $\alpha = \frac{\varepsilon}{k} > 0$.

Soit $x \in [a, b]$.

Supposons : $|x - x_0| \leq \alpha$. On remarque :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq k |x - x_0| && (\text{car } f \text{ est } k\text{-lipschitzienne sur } [a, b]) \\ &\leq k \times \alpha = \varepsilon && (\text{par définition de } \alpha) \end{aligned}$$

La fonction f est donc continue sur $[a, b]$.

Commentaire

La valeur de α peut sembler « sortie du chapeau ». C'est une variable que l'on peut déterminer au brouillon.

En effet, comme la fonction f est k -lipschitzienne sur $[a, b]$, pour tout $(x, x_0) \in [a, b]^2$:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq k |x - x_0|$$

Ainsi, si on suppose : $|x - x_0| \leq \alpha$, on obtient, par transitivité :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq k |x - x_0| \leq k \alpha$$

Or, on souhaite obtenir : $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. C'est pourquoi on choisit α de sorte que : $k \alpha = \varepsilon$. Autrement dit : $\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$. □

15. Démontrer que la fonction f admet un unique point fixe sur $[a, b]$. On le note ℓ .

Démonstration.

- Démontrons d'abord l'existence d'un point fixe pour ℓ .

On note g la fonction définie par :

$$\begin{aligned} g &: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - x \end{aligned}$$

La fonction g :

× est continue sur $[a, b]$, car elle est la somme de fonctions continues sur $[a, b]$.

× vérifie : $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$. En effet :

- d'une part : $g(a) = f(a) - a \geq 0$, car, comme f est à valeurs dans $[a, b]$, alors : $f(a) \in [a, b]$.
Donc : $f(a) \geq a$.
- d'autre part : $g(b) = f(b) - b \leq 0$, car, comme f est à valeurs dans $[a, b]$, alors : $f(b) \in [a, b]$.
Donc : $f(b) \leq b$.

Par théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\ell \in [a, b]$ tel que : $g(\ell) = 0$. Ainsi : $f(\ell) - \ell = 0$.

La fonction f admet donc au moins un point fixe noté ℓ .

- Démontrons maintenant l'unicité de ce point fixe ℓ .

On procède par l'absurde.

Supposons que f admet au moins deux points fixes dans $[a, b]$. Autrement dit, il existe $(\ell_1, \ell_2) \in [a, b]^2$ tel que :

- × $\ell_1 \neq \ell_2$
- × $f(\ell_1) = \ell_1$
- × $f(\ell_2) = \ell_2$

Puisque la fonction f est k -lipschitzienne sur $[a, b]$, alors :

$$\begin{aligned} |f(\ell_2) - f(\ell_1)| &\leq k |\ell_2 - \ell_1| \\ \parallel \\ |\ell_2 - \ell_1| \end{aligned}$$

Or : $k < 1$. Ainsi :

$$|\ell_2 - \ell_1| \leq k |\ell_2 - \ell_1| < |\ell_2 - \ell_1|$$

Absurde !

La fonction f admet donc un unique point fixe.

□

16. Un point fixe attractif.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [a, b] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Démonstration.

- Tout d'abord, remarquons que, par récurrence immédiate, la suite (u_n) est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [a, b]$.

Commentaire

Cette récurrence n'est pas le coeur de la question. Il n'y a donc pas besoin de la rédiger en détails. Si cela était nécessaire, on rédigerait comme suit.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \begin{cases} u_n \text{ bien défini} \\ u_n \in [a, b] \end{cases}$.

► **Initialisation :**

D'après l'énoncé : $u_0 \in [a, b]$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $\begin{cases} u_{n+1} \text{ bien défini} \\ u_{n+1} \in [a, b] \end{cases}$)

- Tout d'abord, par hypothèse de récurrence, le réel u_n est bien défini et : $u_n \in [a, b]$. Or, la fonction f est définie sur $[a, b]$. Ainsi, $f(u_n)$ est bien défini, et donc u_{n+1} aussi.
- D'après l'énoncé, la fonction f est à valeurs dans $[a, b]$.
On en déduit : $u_{n+1} = f(u_n) \in [a, b]$.

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

Comme $u_n \in [a, b]$ et $\ell \in [a, b]$, alors, par k -lipschitzianité de f :

$$|f(u_n) - f(\ell)| \leq k |u_n - \ell|$$

||

$$|u_{n+1} - \ell| \quad (\text{car } \ell \text{ est un point fixe de } f)$$

On en déduit, par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$.

Commentaire

Comme précédemment, cette récurrence n'est pas l'objet de la question. Détaillons la. Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$.

► Initialisation

On remarque :

$$k^0 |u_0 - \ell| = |u_0 - \ell| \geq |u_0 - \ell|$$

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► Hérité : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. : $|u_{n+1} - \ell| \leq k^{n+1} |u_0 - \ell|$).

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \ell| &\leq k |u_n - \ell| && (d'après ce qui précède) \\ &\leq k \times k^n |u_0 - \ell| && (par hypothèse de récurrence) \\ &= k^{n+1} |u_0 - \ell| \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

- On sait maintenant :

$$\begin{aligned} \times \quad &\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell| \\ \times \quad &\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 \\ \times \quad &\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n |u_0 - \ell| = 0, \text{ car } : k \in]-1, 1[. \end{aligned}$$

Par théorème d'encadrement, la suite (u_n) converge vers ℓ .

Commentaire

Cette question est plutôt ardue, car elle nécessite une forte prise d'initiative. Pour avancer, il faut suivre le schéma classique d'étude d'une suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in I & (\text{l'ensemble } I \text{ est un intervalle}) \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.
- Déterminer une relation du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leq k |u_n - \ell|$$

On peut pour cela utiliser l'inégalité des accroissements finis ou une propriété de k -lipschitzianité.

Notons que, dans l'inégalité ci-dessus, le réel ℓ est un point fixe de f .

- En déduire par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$$

- Si $k \in [0, 1[$, on peut conclure par théorème d'encadrement que la suite (u_n) converge vers ℓ . □

Un affaiblissement des hypothèses

On suppose dans cette sous-partie que la fonction f vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad (x \neq y) \Rightarrow \left(|f(y) - f(x)| < |y - x| \right)$$

17. Démontrer que la fonction f admet un unique point fixe sur $[a, b]$. On le note L .

Démonstration.

- Démontrons que la fonction f est continue sur $[a, b]$. On pourra alors conclure qu'elle admet au moins un point fixe, en raisonnant, comme en question **15**, avec le théorème des valeurs intermédiaires.

Il s'agit de démontrer que, pour tout $x_0 \in [a, b]$, la fonction f est continue en x_0 . Autrement dit :

$$\forall x_0 \in [a, b], \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in [a, b], (|x - x_0| \leq \alpha) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon)$$

Soit $x_0 \in [a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$.

On note : $\alpha = \varepsilon > 0$.

Soit $x \in [a, b]$. Supposons : $|x - x_0| \leq \alpha$. Deux cas se présentent :

× si $x \neq x_0$, alors :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &< |x - x_0| && \text{(d'après l'énoncé,} \\ &&& \text{car : } x \neq x_0) \\ &\leq \alpha = \varepsilon && \text{(par définition de } \alpha) \end{aligned}$$

× si $x = x_0$, alors :

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 \leq \varepsilon$$

La fonction f est donc continue sur $[a, b]$.

Avec le même raisonnement qu'en question **15**, on en déduit que la fonction f admet au moins un point fixe, notée L .

- Démontrons maintenant l'unicité de ce point fixe L .

On procède par l'absurde.

Supposons que f admet au moins deux points fixes dans $[a, b]$. Autrement dit, il existe $(L_1, L_2) \in [a, b]^2$ tel que :

$$\times L_1 \neq L_2$$

$$\times f(L_1) = L_1$$

$$\times f(L_2) = L_2$$

Comme : $L_1 \neq L_2$, d'après la propriété vérifiée par f dans cette partie :

$$|f(L_2) - f(L_1)| < |L_2 - L_1|$$

||

$$|L_2 - L_1|$$

Ainsi :

$$|L_2 - L_1| < |L_2 - L_1|$$

Absurde !

La fonction f admet donc un unique point fixe.

□

18. Démontrer que toute suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [a, b] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

admet le réel L comme limite.

On utilisera sans démonstration le théorème de Bolzano-Weierstrass : toute suite bornée possède une sous-suite convergente.

Démonstration.

- Comme dans la question **16**, on démontre que la suite (u_n) est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [a, b]$. La suite (u_n) est en particulier bornée. Par théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet donc une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ convergente. On note α sa limite.
- Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $v_n = |u_n - L|$. Deux cas se présentent alors.
 - × s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $u_{n_0} = L$, alors, par récurrence immédiate, la suite (u_n) est stationnaire égale à L à partir du rang n_0 . Elle converge donc en particulier vers L .
 - × si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq L$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut appliquer la propriété vérifiée par la fonction f à $u_n \in [a, b]$ et $L \in [a, b]$. On obtient :

$$\begin{aligned} |f(u_n) - f(L)| &< |u_n - L| = v_n \\ \parallel \\ v_{n+1} &= |u_{n+1} - L| \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc (strictement) décroissante. On sait donc qu'elle est :

- décroissante,
- minorée par 0.

Elle converge donc vers une limite d vérifiant : $d \geq 0$. Il reste alors à démontrer : $d = 0$. Ce qui permettra de conclure que la suite (u_n) converge vers L (par définition de la suite (v_n)).

On procède pour cela par l'absurde.

Supposons : $d > 0$.

- D'une part, la suite $(v_{\varphi(n)})$ est une sous-suite de la suite (v_n) . Elle est donc convergente de même limite que (v_n) . Autrement dit :

$$|u_{\varphi(n)} - L| = v_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d$$

De plus, comme la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers α , alors :

$$|u_{\varphi(n)} - L| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |\alpha - L|$$

Par unicité de la limite : $d = |\alpha - L|$.

- D'autre part, on remarque, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |f(u_{\varphi(n)}) - f(L)| &= |u_{\varphi(n)+1} - f(L)| \\ &= |u_{\varphi(n)+1} - L| \quad (\text{car } L \text{ est un point fixe de } f) \\ &= v_{\varphi(n)+1} \end{aligned}$$

Comme la suite $(v_{\varphi(n)+1})$ est une sous-suite de (v_n) , alors elle converge vers la même limite. Ainsi :

$$|f(u_{\varphi(n)}) - f(L)| = v_{\varphi(n)+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d$$

De plus, par continuité de f sur $[a, b]$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_{\varphi(n)}) = f(\alpha)$. Ainsi :

$$|f(u_{\varphi(n)}) - f(L)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |f(\alpha) - f(L)|$$

Par unicité de la limite : $d = |f(\alpha) - f(L)|$.

- On en déduit :

$$|f(\alpha) - f(L)| = |\alpha - L|$$

De plus : $|\alpha - L| = d > 0$. On en déduit : $\alpha \neq L$. Ainsi, par la propriété de f dans cette partie :

$$|f(\alpha) - f(L)| < |\alpha - L|$$

Absurde !

Ainsi : $d = 0$. Autrement dit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - L| = 0$.

La suite (u_n) converge donc vers L .

□

Problème

Résultats admis

Tout au long du problème, on pourra utiliser les résultats suivants sans démonstration.

- Tout d'abord :

$$\operatorname{sh}(x) - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{6} \quad \text{et} \quad \operatorname{th}(x) - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^3}{3}$$

- Soit I un intervalle. Soit $x_0 \in \bar{I}$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

La fonction f est dite dérivable en x_0 si et seulement si la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie en x_0 .

Si c'est le cas, cette limite est $f'(x_0)$.

Partie I : Fonction tangente hyperbolique

On définit la fonction tangente hyperbolique, notée th , par :

$$\operatorname{th} : x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$$

19. Justifier que la fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée dont on simplifiera l'expression au maximum.

Démonstration.

- La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$, car elle est le quotient $\operatorname{th} = \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$ de :
 - × sh qui est dérivable sur $\mathbb{R}$,
 - × ch qui :
 - est dérivable sur $\mathbb{R}$,
 - NE S'ANNULE PAS sur $\mathbb{R}$.

La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{th}'(x) = \frac{\operatorname{sh}'(x) \times \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) \times \operatorname{ch}'(x)}{(\operatorname{ch}(x))^2} = \frac{(\operatorname{ch}(x))^2 - (\operatorname{sh}(x))^2}{(\operatorname{ch}(x))^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$$

Finalement $\operatorname{th}' : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$.

□

20. Déterminer la parité de th .

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors : $-x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{th}(-x) &= \frac{\operatorname{sh}(-x)}{\operatorname{ch}(-x)} \\ &= \frac{-\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} \quad (\text{car } \operatorname{sh} \text{ est impaire} \\ &\quad \text{et } \operatorname{ch} \text{ est paire}) \\ &= -\operatorname{th}(x) \end{aligned}$$

La fonction th est impaire.

□

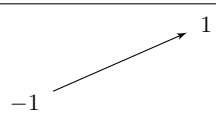
21. Dresser, en justifiant, le tableau de variations complet de th .

Démonstration.

- D'après la question **25**, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{th}'(x) = \frac{1}{(\text{ch}(x))^2} > 0$$

- On obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $\text{th}'(x)$	+	
Variations de th		

- Détaillons les éléments de ce tableau.

× Tout d'abord :

$$\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

Or deux fonctions équivalentes en un point ont même limite en ce point.

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(x) = 1$.

× Ensuite, comme la fonction th est impaire, d'après la question précédente : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}(x) = -1$.

□

22. Calculer $\text{th}(0)$, puis déterminer le signe de la fonction th sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\text{th}(0) = \frac{\text{sh}(0)}{\text{ch}(0)} = \frac{0}{1} = 0$$

$\text{th}(0) = 0$

- Comme la fonction th est croissante sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente.

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad \text{th}(x) \leq \text{th}(0) = 0$$

De plus, pour la même raison :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \text{th}(x) \geq \text{th}(0) = 0$$

La fonction th est à valeurs négatives sur $\mathbb{R}_-$ et positives sur $\mathbb{R}_+$.

□

23. Démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \text{th}(x) < x$$

On pourra utiliser, après l'avoir démontré : $\text{th}' = 1 - \text{th}^2$.

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$1 - (\text{th}(x))^2 = 1 - \left(\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} \right)^2 = 1 - \frac{(\text{sh}(x))^2}{(\text{ch}(x))^2} = \frac{(\text{ch}(x))^2 - (\text{sh}(x))^2}{(\text{ch}(x))^2} = \frac{1}{(\text{ch}(x))^2} = \text{th}'(x)$$

On en conclut : $\text{th}' = 1 - \text{th}^2$.

- On note ensuite h la fonction définie par :

$$\begin{aligned} h &: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x - \text{th}(x) \end{aligned}$$

- × Tout d'abord, la fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est le quotient $\text{th} = \frac{\text{sh}}{\text{ch}}$ de :

- ▶ sh qui est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,
- ▶ ch qui :
 - est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,
 - NE S'ANNULE PAS sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction h est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, car elle est la combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

- × Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$h'(x) = 1 - \text{th}'(x) = 1 - \frac{\text{ch}(x) \times \text{ch}(x) - \text{sh}(x) \times \text{sh}(x)}{(\text{ch}(x))^2} = 1 - \left(1 - (\text{th}(x))^2 \right) = (\text{th}(x))^2$$

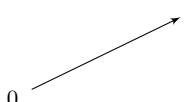
Démontrons : $h'(x) > 0$.

$$\begin{aligned} h'(x) > 0 &\Leftrightarrow (\text{th}(x))^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \text{th}(x) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \text{sh}(x) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x \neq 0 \end{aligned}$$

Or, cette dernière assertion est vraie, car : $x > 0$.

Par raisonnement par équivalence, on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h'(x) > 0$.

- × On en déduit le tableau de variations suivant.

x	0	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	+	
Variations de h		

Comme la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) > h(0)$$

De plus : $h(0) = 0$.

On en conclut : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \text{th}(t) < t$.

Commentaire

On pouvait également remarquer qu'il s'agissait d'une inégalité de convexité. On aurait alors rédigé ainsi.

- On démontre que la fonction th est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque :

$$\text{th}'(x) = 1 - (\text{th}(x))^2$$

On en déduit :

$$\text{th}''(x) = -2 \text{th}'(x) \text{th}(x) = -2 (1 - (\text{th}(x))^2) \text{th}(x)$$

Or :

$$\begin{aligned} 1 - (\text{th}(x))^2 &= 1 - \frac{(\text{sh}(x))^2}{(\text{ch}(x))^2} \\ &= \frac{(\text{ch}(x))^2 - (\text{sh}(x))^2}{(\text{ch}(x))^2} \\ &= \frac{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}{(\text{ch}(x))^2} \\ &= \frac{\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}} - (\cancel{e^{2x}} - 2 + \cancel{e^{-2x}})}{4 (\text{ch}(x))^2} \\ &= \frac{\cancel{4}}{\cancel{4} (\text{ch}(x))^2} = \frac{1}{(\text{ch}(x))^2} \end{aligned}$$

On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, \text{th}''(x) = -2 \frac{\text{th}(x)}{(\text{ch}(x))^2}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On détermine le signe de $\text{th}''(x)$.

$$\begin{aligned} \text{th}''(x) < 0 &\Leftrightarrow -2 \frac{\text{th}(x)}{(\text{ch}(x))^2} < 0 \\ &\Leftrightarrow \text{th}(x) > 0 \quad (\text{car} : -2 \frac{1}{(\text{ch}(x))^2} < 0) \\ &\Leftrightarrow \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} > 0 \\ &\Leftrightarrow \text{sh}(x) > 0 \quad (\text{car} : \text{ch}(x) > 0) \end{aligned}$$

Or, cette dernière assertion est vraie (car : $x > 0$).

Par raisonnement par équivalence, la première aussi. Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \text{th}''(x) < 0$.

La fonction th est donc (strictement) concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

Commentaire

- La courbe représentative de th est donc située en dessous de ses tangentes, en particulier celle au point d'abscisse 0 d'équation :

$$\begin{aligned} y &= \text{th}(0) + \text{th}'(0)(x - 0) \\ &= 0 + 1 \times x = x \end{aligned}$$

On en conclut : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \text{th}(x) \leq t$.

- Enfin, puisque th est strictement concave, l'égalité n'a lieu qu'en 0 (abscisse du point de tangence). Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \text{th}(x) < t$$

□

Partie II : Un prolongement de fonction

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{x}$$

24. Démontrer que la fonction f est paire.

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors : $-x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\text{sh}(-x)}{-x} \\ &= \frac{-\text{sh}(x)}{-x} && (\text{car sh est impaire}) \\ &= \frac{\text{sh}(x)}{x} = f(x) \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction f est paire.

□

25. Démontrer que la fonction f est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, puis :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{\text{ch}(x)}{x^2} (x - \text{th}(x))$$

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ car elle est le quotient $f = \frac{f_1}{f_2}$ de :
 - $\times f_1 = \text{sh}$ qui est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$,
 - $\times f_2 : x \mapsto x$ qui :
 - est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$,
 - NE S'ANNULE PAS sur ces intervalles.

La fonction f est donc dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

- Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\text{sh}'(x) \times x - \text{sh}(x) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{x \text{ ch}(x) - \text{sh}(x)}{x^2} \\ &= \frac{\text{ch}(x) \left(x - \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} \right)}{x^2} \\ &= \frac{\text{ch}(x)}{x^2} \left(x - \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} \right) \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{\text{ch}(x)}{x^2} (x - \text{th}(x))$.

□

- 26.** Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$. On notera à nouveau f ce prolongement.

Démonstration.

La fonction f est :

- × continue sur $] -\infty, 0[$, car elle y est dérivable d'après la question précédente.
- × prolongeable par continuité en 0. En effet :

$$f(x) = \frac{\text{sh}(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\textcolor{red}{x}}{\textcolor{red}{x}} = 1$$

Or, deux fonctions équivalentes en un point ont même limite en ce point. Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Comme f admet une limite finie en 0, elle est prolongeable par continuité en 0 (en posant : $f(0) = 1$).

- × continue sur $]0, +\infty[$, car elle y est dérivable d'après la question précédente.

Finalement, la fonction f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

□

- 27.** Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer une équation de la tangente à la courbe de f en 0.

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\tau_0(f)(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\text{sh}(x)}{x} - 1}{x} = \frac{\text{sh}(x) - x}{x^2}$$

Or, d'après l'énoncé : $\text{sh}(x) - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{6}$. Ainsi :

$$\tau_0(f)(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x^3}{6}}{x^2} = \frac{x}{6}$$

Or, deux fonctions équivalentes en un point ont même limite en ce point, et : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{6} = 0$.

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0} \tau_0(f)(x) = 0$.

La fonction $\tau_0(f)$ admet une limite finie en 0.

La fonction f est donc dérivable en 0 et : $f'(0) = 0$.

L'équation de la tangente à la courbe de f en 0 est :

$$\begin{aligned} y &= f(0) + f'(0)(x - 0) \\ &= 1 + 0 \times x = 1 \end{aligned}$$

L'équation de la tangente à la courbe de f en 0 est : $y = 1$.

□

28. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$:

- sur $] - \infty, 0[$, car elle est le quotient $f = \frac{f_1}{f_2}$ de :
 - × $f_1 = \text{sh}$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - \infty, 0[$,
 - × $f_2 : x \mapsto x$ qui :
 - est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - \infty, 0[$,
 - NE S'ANNULE PAS sur $] - \infty, 0[$.
- en 0. En effet, démontrons que la fonction f' est continue en 0.
D'après la question **27** :

$$f'(x) = \frac{\text{ch}(x)}{x^2}(x - \text{th}(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\text{ch}(x)}{x^2} \times \frac{x^3}{3} \quad (d'après l'énoncé)$$

De plus : $\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$. Ainsi :

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^2} \times \frac{x^3}{3} = \frac{x}{3}$$

Or, deux fonctions équivalentes en un point ont même limite en ce point et : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} = 0$.

On en déduit : $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0)$.

- sur $]0, +\infty[$, avec un raisonnement similaire à celui sur $] - \infty, 0[$.

La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Commentaire

- Le chapitre Dérivabilité n'était pas encore au programme de ce DS. Avec les outils de ce dernier, on aurait également pu répondre à cette question en utilisant le théorème de la limite de la dérivée. On aurait alors rédigé comme suit.

- La fonction f :

× est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, car elle est le quotient $f = \frac{f_1}{f_2}$ de :

- ▶ $f_1 = \text{sh}$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - \infty, 0[$,
- ▶ $f_2 : x \mapsto x$ qui :
 - est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - \infty, 0[$,
 - NE S'ANNULE PAS sur $] - \infty, 0[$.

× est continue sur $\mathbb{R}$, d'après la question **26**.

× vérifie : $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$. (avec la même démonstration que plus haut)

D'après le théorème de la limite de la dérivée, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

□

Partie III : Une équation différentielle

On souhaite déterminer toutes les fonctions y de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x y'(x) + y(x) = \operatorname{ch}(x) \quad (E)$$

29. Démontrer que si y est une solution de (E) , alors : $y(0) = 1$.

Démonstration.

Supposons que la fonction y est solution de (E) . Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x y'(x) + y(x) = \operatorname{ch}(x)$$

En particulier :

$$0 \times \cancel{y'(0)} + y(0) = \operatorname{ch}(0) = 1$$

On en déduit : $y(0) = 1$.

Ainsi, si y est solution de (E) , alors : $y(0) = 1$.

□

30. Montrer que la fonction f , définie dans la partie précédente, est une solution particulière de (E) .

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question 28, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, deux cas se présentent.

× Si $x = 0$, alors :

$$0 \times f'(0) + f(0) = f(0) = 1 = \operatorname{ch}(0)$$

× Si $x \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned} x f'(x) + f(x) &= \cancel{x} \frac{x \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)}{x^{\cancel{2}}} + \frac{\operatorname{sh}(x)}{x} && (d'après le calcul de la question 27) \\ &= \operatorname{ch}(x) - \cancel{\frac{\operatorname{sh}(x)}{x}} + \cancel{\frac{\operatorname{sh}(x)}{x}} \\ &= \operatorname{ch}(x) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x f'(x) + f(x) = \operatorname{ch}(x)$$

La fonction f est donc une solution particulière de (E) .

□

31. (*) Résoudre l'équation homogène associée à (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

L'équation homogène associée à (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$x y' + y = 0_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

Autrement dit, puisqu'on se place sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y' + \frac{1}{x} y = 0_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \quad (H)$$

On remarque alors que :

× l'équation différentielle (H) est linéaire homogène d'ordre 1.

× une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto \ln(|x|) = \ln(x)$ (car on se place sur $\mathbb{R}_+^*$).

L'ensemble des solutions de (H) est donc :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-\ln(x)} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

L'ensemble des solutions de (H) est ainsi : $\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\lambda}{x} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

□

32. Démontrer que si une fonction y est une solution de (E) , alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = \frac{C}{x} + f(x)$$

Démonstration.

Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Supposons que la fonction y est solution de (E) . Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x y'(x) + y(x) = \text{ch}(x)$$

De plus, comme f est une solution particulière de (E) d'après 30 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x f'(x) + f(x) = \text{ch}(x)$$

On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$x y'(x) + y(x) = x f'(x) + f(x)$$

Ou encore :

$$x (y'(x) - f'(x)) + y(x) - f(x) = 0$$

Ainsi, par linéarité de l'évaluation en x :

$$x (y' - f')(x) + (y - f)(x) = 0$$

D'où, par linéarité de la dérivation :

$$x (y - f)'(x) + (y - f)(x) = 0$$

Comme de plus, la fonction $y - f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction $y - f$ est solution de (H) .

D'après la question précédente, on en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{array}{lcl} y - f & : & \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ & & x \mapsto \frac{C}{x} \end{array}$$

Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $y(x) - f(x) = \frac{C}{x}$.

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, y(x) = \frac{C}{x} + f(x)$.

□

33. Justifier, avec la question **29** : $C = 0$.

Démonstration.

On procède par l'absurde.

Supposons : $C \neq 0$.

- D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$y(x) = \frac{C}{x} + f(x)$$

Ainsi : $y(x) - f(x) = \frac{C}{x}$.

- De plus, par continuité des fonctions y et f en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) - f(x) = y(0) - f(0) = 1 - 1 = 0 \quad (\text{d'après } \mathbf{29})$$

On en déduit :

$$\frac{C}{x} = y(x) - f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Absurde ! (comme : $C \neq 0$, alors : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{C}{x} = \pm\infty$)

On en conclut : $C = 0$.

□

34. Conclure que la fonction f est l'unique solution de (E) .

Démonstration.

On souhaite démontrer :

$$y \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow y = f$$

On procède par double implication.

($\Leftarrow$) Supposons : $y = f$.

Alors, d'après la question **30**, la fonction y est solution de (E) .

($\Rightarrow$) Supposons que la fonction y est solution de (E) .

Alors, d'après les questions **32** et **33** :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = \frac{0}{x} + f(x) = f(x)$$

On en déduit que la fonction y est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad x y'(x) + y(x) = \text{ch}(x) \\ y(1) = f(1) \end{cases}$$

De plus, la fonction f est aussi solution de ce problème de Cauchy.

Or ce problème de Cauchy linéaire d'ordre 1 admet une unique solution. Ainsi : $y = f$.

Finalement, l'unique solution de l'équation (E) est la fonction f .

□

Partie IV : Une suite implicite

35. Démontrer que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle que l'on déterminera. On note g sa bijection réciproque.

Démonstration.

- D'après les questions 27 et 25, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f' : x \mapsto \begin{cases} \frac{\text{ch}(x)}{x^2} (x - \text{th}(x)) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow x - \text{th}(x) > 0 \quad (\text{car : } \frac{\text{ch}(x)}{x^2} > 0) \\ &\Leftrightarrow x > \text{th}(x) \end{aligned}$$

Cette dernière assertion est vraie d'après 23 (car : $x \in \mathbb{R}_+^*$).

Ainsi, par raisonnement par équivalence, la première assertion l'est aussi.

On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme de plus : $f'(0) = 0$, on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Commentaire

On utilise ici l'implication suivante :

$$\left. \begin{array}{l} \times \forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) \geq 0 \\ \times \text{ la fonction } f' \text{ ne s'annule qu'en un nombre fini de points} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+$$

- On en déduit que la fonction f est :
 - × continue sur $\mathbb{R}_+$, d'après 26,
 - × strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, d'après ce qui précède.

Elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[)$ où :

$$f([0, +\infty[) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [1, +\infty[$$

En effet :

$$f(x) = \frac{\text{sh}(x)}{x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad (\text{par croissances comparées})$$

La fonction f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.

□

36. Déterminer, en le justifiant, la monotonie de g .

Démonstration.

Par théorème de la bijection, la fonction g est de même monotonie que la fonction $f|_{\mathbb{R}_+}$.

On en déduit que la fonction g est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

□

37. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n = g\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que vaut $f(x_n)$? Justifier.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord, la quantité x_n est bien définie.
En effet : $\frac{n+1}{n} \geq 1$. Autrement dit : $\frac{n+1}{n} \in [1, +\infty[$.
On en déduit que $g\left(\frac{n+1}{n}\right)$ est bien défini, et donc x_n aussi.
- Ensuite, puisque la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$ d'après la question **35**, on en déduit que la fonction g est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

On en conclut : $x_n \in \mathbb{R}_+$.

- On calcule alors :

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f|_{\mathbb{R}_+}(x_n) && (\text{car } x_n \in \mathbb{R}_+) \\ &= f|_{\mathbb{R}_+}\left(g\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) && (\text{par définition de } x_n) \\ &= (f|_{\mathbb{R}_+} \circ g)\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \text{id}_{[1, +\infty[}\left(\frac{n+1}{n}\right) && (\text{par définition de } g) \\ &= \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

On obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(x_n) = \frac{n+1}{n}$.

□

38. Démontrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ainsi définie est décroissante.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \times \quad f(x_n) &= \frac{n+1}{n}, \\ \times \quad f(x_{n+1}) &= \frac{n+2}{n+1}. \end{aligned}$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned}
 f(x_{n+1}) \leq f(x_n) &\Leftrightarrow \frac{n+2}{n+1} \leq \frac{n+1}{n} \\
 &\Leftrightarrow n(n+2) \leq (n+1)^2 \quad (\text{car : } n(n+1) > 0) \\
 &\Leftrightarrow n^2 + 2n \leq n^2 + 2n + 1 \\
 &\Leftrightarrow 0 \leq 1
 \end{aligned}$$

Cette dernière assertion est vraie. Ainsi, par raisonnement par équivalence, la première assertion l'est aussi.

- On en déduit :

$$f(x_{n+1}) \leq f(x_n)$$

Donc, par croissance de g sur $[1, +\infty[$ (question précédente) :

$$\begin{array}{ccc}
 g(f(x_{n+1})) & \leq & g(f(x_n)) \\
 \parallel & & \parallel \\
 x_{n+1} & \leq & x_n
 \end{array}$$

La suite (x_n) est donc décroissante.

□

39. Démontrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Démonstration.

- Chercher à démontrer que la suite (x_n) converge vers 0 revient à démontrer que la suite $\left(g\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)$ converge vers 0.
- On sait : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. On cherche donc à démontrer : $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$.
 - × Tout d'abord, par théorème de la bijection, la fonction g est continue sur $[1, +\infty[$. Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$.
 - × De plus, d'après **26** : $f(0) = 1$. On en déduit :

$$g(1) = g(f(0)) = g(f|_{\mathbb{R}_+}(0)) = 0$$

Ainsi :

$$x_n = g\left(\frac{n+1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(1) = 0$$

La suite (x_n) converge donc vers 0.

□

40. Déterminer un équivalent de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $\operatorname{sh}(x) - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{6}$. On en déduit :

$$\operatorname{sh}(x) - x = \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

Ainsi :

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{x} = \frac{1}{x} \left(x + \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \right) = 1 + \frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

Or, d'après la question précédente : $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Ainsi :

$$f(x_n) = 1 + \frac{x_n^2}{6} + o_{n \rightarrow +\infty}(x_n^2)$$

- De plus, d'après 37, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(x_n) = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

On en déduit :

$$\textcolor{red}{x} + \frac{1}{n} = \textcolor{red}{x} + \frac{x_n^2}{6} + o_{n \rightarrow +\infty}(x_n^2)$$

Autrement dit :

$$\frac{x_n^2}{6} = \frac{1}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}(x_n^2)$$

On en déduit :

$$\frac{x_n^2}{6} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

- On obtient alors enfin :

$$x_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{6}{n}$$

$$\text{donc } x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{6}{n}} \quad (\text{par compatibilité de l'équivalent avec les puissances})$$

Finalement : $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{6}{n}}$.

□