

DS5 /103



On traitera **OBLIGATOIREMENT** les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 5. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours /8

1. (*) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrer : $\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4, \left. \begin{array}{l} a \equiv b [p] \\ c \equiv d [p] \end{array} \right\} \Rightarrow ac \equiv bd [p]$.

• 2 pts

2. Déterminer le PGCD de 2772 et 12870 :

a) par algorithme d'Euclide,

• 1 pt : On effectue la division euclidienne de 12870 par 2772.

$$\begin{cases} 12870 = 2772 \times 4 + 1782 \\ 0 \leq 1782 < 2772 \end{cases}$$

On effectue la division euclidienne de 2772 par 1782.

$$\begin{cases} 2772 = 1782 \times 1 + 990 \\ 0 \leq 990 < 1782 \end{cases}$$

• 1 pt : On effectue la division euclidienne de 1782 par 990.

$$\begin{cases} 1782 = 990 \times 1 + 792 \\ 0 \leq 792 < 990 \end{cases}$$

On effectue la division euclidienne de 990 par 792.

$$\begin{cases} 990 = 792 \times 1 + \boxed{198} \\ 0 \leq 198 < 792 \end{cases}$$

On effectue la division euclidienne de 792 par 198.

$$\begin{cases} 792 = 198 \times 4 + 0 \\ 0 \leq 0 < 198 \end{cases}$$

b) par décomposition en facteurs premiers.

• 2 pts (décompositions + conclusion)

$$\times 2772 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11$$

$$\times 12870 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 11 \times 13$$

3. (*) Résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} 3x & & + & 2z & & = & 0 \\ & 3y & + & z & + & 3t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & - & t & = & 0 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ 1 pt : } \begin{cases} 3x & + & 2z & = & 0 \\ & 3y & + & z & + & 3t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & - & t & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x & = & -2z \\ & 3y & = & -z - 3t \end{cases}$$

- 1 pt : l'ensemble des solutions du système est :

$$\left\{ z \cdot \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0 \right) + t \cdot (0, -1, 0, 1) \mid (z, t) \in \mathbb{K}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0 \right), (0, -1, 0, 1) \right)$$

Exercice 2 /27

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}$.

4. Exprimer u_1 et u_2 en fonction de u_0 .

- 1 pt : u_1 est bien défini et $u_1 = \sqrt{1+u_0}$
- 1 pt : $u_2 = \sqrt{2+\sqrt{1+u_0}}$

5. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et positive.

- 1 pt : initialisation
- 2 pts : hérédité

6. Montrer que pour tout réel $a \geq 0$: $\sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(1+a)$.

- 1 pt : La fonction $h : x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.
Sa courbe représentative se situe donc au-dessus de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 1.
- 1 pt : cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= h(1) + h'(1)(x-1) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2}(x+1) \end{aligned}$$

7. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{n} \leq u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- 1 pt : initialisation
- 3 pts : hérédité

8. Justifier : $u_{n-1} = o(n)$.

- 1 pt : $\sqrt{n-2} \leq u_{n-2} \leq n-2 + \frac{u_0}{2^{n-2}}$
- 1 pt : $\frac{\sqrt{n-1+\sqrt{n-2}}}{n} \leq \frac{u_{n-1}}{n} \leq \frac{\sqrt{2n-3+\frac{u_0}{2^{n-2}}}}{n}$
- 1 pt : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n-1+\sqrt{n-2}}}{n} = 0$
- 1 pt : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2n-3+\frac{u_0}{2^{n-2}}}}{n} = 0$

9. a) Démontrer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(u_n)^2}{n} = 1$.
On pourra utiliser la question précédente ainsi que la relation qui définit u_n en fonction de u_{n-1} .

- **1 pt** : $\frac{(u_n)^2}{n} = 1 + \frac{u_{n-1}}{n}$
- **1 pt** : conclusion à l'aide de la question précédente

b) En déduire : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}$.

- **1 pt** : continuité de $\sqrt{\cdot}$ en 1

10. On introduit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - \sqrt{n}$. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \frac{u_{n-1}}{u_n + \sqrt{n}}$$

- **1 pt** : utilisation de $u_{n-1} = (u_n)^2 - n$

11. Démontrer : $u_n + \sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

- **1 pt** : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n + \sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = 1$

12. Établir que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

- **1 pt** : $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}}$
- **1 pt** : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$

13. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.

- **1 pt** : $u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$
- **1 pt** : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{n} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$
- **1 pt** : $u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right)$
- **1 pt** : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \times \frac{1}{n}$ (car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$)
- **1 pt** : $u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}} > 0$

Exercice 3 : Théorèmes de point fixe /18

On étudie ici deux théorèmes donnant l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une fonction f lipschitzienne (la définition est donnée plus bas).

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$. Soit f une fonction définie sur le segment $[a, b]$ et à valeurs dans le segment $[a, b]$.

Théorème du point fixe de Picard

Soit $k \in]0, 1[$. On suppose que la fonction f est k -lipschitzienne, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad |f(y) - f(x)| \leq k |y - x|$$

14. Démontrer que la fonction f est continue sur $[a, b]$.

- **1 pt : On note note : $\alpha = \frac{\varepsilon}{k} > 0$**
- **1 pt : reste de la démonstration**

15. Démontrer que la fonction f admet un unique point fixe sur $[a, b]$. On le note ℓ .

- **2 pts : existence d'un point fixe**
 - × **1 pt : $g(a) = f(a) - a \geq 0$, car... Et $g(b) = f(b) - b \leq 0$, car...**
 - × **1 pt : TVI**
- **1 pt : raisonnement par l'absurde**

16. Un point fixe attractif.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [a, b] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

- **1 pt : par récurrence immédiate (u_n) est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [a, b]$.**
- **1 pt : Comme $u_n \in [a, b]$ et $\ell \in [a, b]$, alors, par k -lipschitzianité de f : $|u_{n+1} - \ell| \leq k |u_n - \ell|$**
- **1 pt : par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$**
- **1 pt : théorème d'encadrement**

Un affaiblissement des hypothèses

On suppose dans cette sous-partie que la fonction f vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad (x \neq y) \Rightarrow \left(|f(y) - f(x)| < |y - x| \right)$$

17. Démontrer que la fonction f admet un unique point fixe sur $[a, b]$. On le note L .

- **2 pts : f est continue sur $[a, b]$**
 - × **1 pt : On note : $\alpha = \varepsilon > 0$**
 - × **1 pt : reste (dont disjonction de cas $x \neq x_0$ / $x = x_0$)**
- **1 pt : unicité du point fixe en raisonnant par l'absurde**

18. Démontrer que toute suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [a, b] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

admet le réel L comme limite.

On utilisera sans démonstration le théorème de Bolzano-Weierstrass : toute suite bornée possède une sous-suite convergente.

- 1 pt : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [a, b]$. La suite (u_n) est donc bornée. Par théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet donc une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ convergente. On note α sa limite.
- 1 pt : s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $u_{n_0} = L$, alors, par récurrence immédiate, la suite (u_n) est stationnaire égale à L à partir du rang n_0 . Elle converge donc en particulier vers L .
- 4 pts : cas « $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq L$ »
 - × 1 pt : on peut appliquer la propriété vérifiée par la fonction f à $u_n \in [a, b]$ et $L \in [a, b]$, on obtient : $v_{n+1} < v_n$
 - × 1 pt : la suite (v_n) est décroissante, minorée par 0. Elle converge donc vers une limite $d \geq 0$.
 - × 1 pt : démo $d = |\alpha - L|$
 - × 1 pt : démo $d = |f(\alpha) - f(L)|$

Problème /50

Résultats admis

Partie I : Fonction tangente hyperbolique

On définit la fonction tangente hyperbolique, notée th , par :

$$\text{th} : x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$$

19. Justifier que la fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée dont on simplifiera l'expression au maximum.

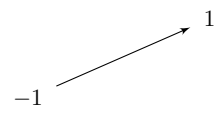
- 1 pt : La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ car...
- 1 pt : $\text{th}' = \frac{1}{\text{ch}^2}$

20. Déterminer la parité de th .

- 1 pt

21. Dresser, en justifiant, le tableau de variations complet de th .

- 3 pts :
 - × 1 pt : stricte monotonie
 - × 1 pt : limite en $+\infty$
 - × 1 pt : limite en $-\infty$

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe de $\text{th}'(x)$	$+$
Variations de th	

22. Calculer $\text{th}(0)$, puis déterminer le signe de la fonction th sur $\mathbb{R}$.

- 1 pt : $\text{th}(0) = 0$
- 1 pt : La fonction th est à valeurs négatives sur $\mathbb{R}_-$ et positives sur $\mathbb{R}_+$.

23. Démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \text{th}(x) < x$$

On pourra utiliser, après l'avoir démontré : $\text{th}' = 1 - \text{th}^2$.

- 1 pt : $\text{th}' = 1 - \text{th}^2$
- 1 pt : $h : x \mapsto x - \text{th}(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
- 1 pt : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h'(x) > 0$
- 1 pt : fin du raisonnement

Partie II : Un prolongement de fonction

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{x}$$

24. Démontrer que la fonction f est paire.

- 1 pt

25. Démontrer que la fonction f est dérivable sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, puis :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{\text{ch}(x)}{x^2} (x - \text{th}(x))$$

- 1 pt : La fonction f est donc dérivable sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
- 1 pt : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{\text{ch}(x)}{x^2} (x - \text{th}(x))$

26. Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$. On notera à nouveau f ce prolongement.

- 1 pt : continuité sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$
- 1 pt : prolongement par continuité en 0

27. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer une équation de la tangente à la courbe de f en 0.

- 1 pt : dérivabilité de f en 0 et $f'(0) = 0$
- 1 pt : L'équation de la tangente à la courbe de f en 0 est : $y = 1$.

28. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- 1 pt : f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$
- 1 pt : f' continue en 0

Partie III : Une équation différentielle

On souhaite déterminer toutes les fonctions y de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x y'(x) + y(x) = \operatorname{ch}(x) \quad (E)$$

29. Démontrer que si y est une solution de (E) , alors : $y(0) = 1$.

• 1 pt

30. Montrer que la fonction f , définie dans la partie précédente, est une solution particulière de (E) .

• 1 pt : f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

• 1 pt : cas $x = 0$

• 1 pt : cas $x \neq 0$

31. (*) Résoudre l'équation homogène associée à (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

• 1 pt : une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto \ln(|x|) = \ln(x)$ (car on se place sur $\mathbb{R}_+^*$)

• 1 pt : L'ensemble des solutions de (H) est ainsi : $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\lambda}{x} \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

32. Démontrer que si une fonction y est une solution de (E) , alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = \frac{C}{x} + f(x)$$

• 1 pt : $y - f$ solution de (H)

• 1 pt : fin de la démonstration

33. Justifier, avec la question 19 : $C = 0$.

• 1 pt : par continuité des fonctions y et f en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) - f(x) = y(0) - f(0) = 1 - 1 = 0$$

• 1 pt : $\frac{C}{x} = y(x) - f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

34. Conclure que la fonction f est l'unique solution de (E) .

• 1 pt : si $y = f$, alors y est solution de (E)

• 2 pts : si y solution de (E) , alors : $y = f$

× 1 pt : la fonction y est solution du problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}, \quad x y'(x) + y(x) = \operatorname{ch}(x) \\ y(1) = f(1) \end{array} \right.$$

× 1 pt : unicité de la solution au problème de Cauchy linéaire d'ordre 1

Partie IV : Une suite implicite

35. Démontrer que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle que l'on déterminera. On note g sa bijection réciproque.

- 1 pt : f strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$
- 1 pt : $f(x) = \frac{\text{sh}(x)}{x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$
- 1 pt : théorème de la bijection

36. Déterminer, en le justifiant, la monotonie de g .

- 1 pt : Par théorème de la bijection, la fonction g est de même monotonie que la fonction $f|_{\mathbb{R}_+}$.
- On en déduit que la fonction g est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

37. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n = g\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que vaut $f(x_n)$? Justifier.

- 1 pt : $\frac{n+1}{n} \in [1, +\infty[$, donc $g\left(\frac{n+1}{n}\right)$ est bien défini, et donc x_n aussi
- 1 pt : explication $x_n \in \mathbb{R}_+$
- 2 pts : $f(x_n) = \frac{n+1}{n}$ (dont 1 pt pour l'utilisation de : $x_n \in \mathbb{R}_+$)

38. Démontrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ainsi définie est décroissante.

- 1 pt : $f(x_{n+1}) \leq f(x_n)$
- 1 pt : par croissance de g sur $[1, +\infty[$: $x_{n+1} \leq x_n$

39. Démontrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

- 1 pt : g continue sur $\mathbb{R}_+$, donc en 1
- 1 pt : $f(0) = 1$, donc : $g(1) = 0$

40. Déterminer un équivalent de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- 1 pt : $f(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$
- 1 pt : $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc : $f(x_n) = 1 + \frac{x_n^2}{6} + o_{n \rightarrow +\infty}(x_n^2)$
- 1 pt : comme $f(x_n) = 1 + \frac{1}{n}$, alors : $\frac{x_n^2}{6} = \frac{1}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}(x_n^2)$
- 1 pt : $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{6}{n}}$