

DS5



On traitera **OBLIGATOIREMENT** les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 5. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. (*) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrer : $\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4, \left. \begin{array}{l} a \equiv b [p] \\ c \equiv d [p] \end{array} \right\} \Rightarrow ac \equiv bd [p]$.
2. Déterminer le PGCD de 2772 et 12870 :
 - a) par algorithme d'Euclide,
 - b) par décomposition en facteurs premiers.
3. (*) Résoudre le système suivant.

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 3x & & & + & 2z & & = 0 \\ & & 3y & + & z & + & 3t = 0 \\ x & + & y & + & z & + & t = 0 \\ 2x & - & y & + & z & - & t = 0 \end{array} \right.$$

Exercice 2

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}$.

4. Exprimer u_1 et u_2 en fonction de u_0 .
5. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et positive.
6. Montrer que pour tout réel $a \geq 0$: $\sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(1+a)$.
7. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{n} \leq u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

8. Justifier : $u_{n-1} = o_{n \rightarrow +\infty}(n)$.

9. a) Démontrer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(u_n)^2}{n} = 1$.

On pourra utiliser la question précédente ainsi que la relation qui définit u_n en fonction de u_{n-1} .

- b) En déduire : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}$.

10. On introduit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - \sqrt{n}$. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \frac{u_{n-1}}{u_n + \sqrt{n}}$$

11. Démontrer : $u_n + \sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

12. Établir que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

13. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.

Exercice 3 : Théorèmes de point fixe

On étudie ici deux théorèmes donnant l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une fonction f lipschitzienne (la définition est donnée plus bas).

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$. Soit f une fonction définie sur le segment $[a, b]$ et à valeurs dans le segment $[a, b]$.

Théorème du point fixe de Picard

Soit $k \in]0, 1[$. On suppose que la fonction f est k -lipschitzienne, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad |f(y) - f(x)| \leq k |y - x|$$

14. Démontrer que la fonction f est continue sur $[a, b]$.
15. Démontrer que la fonction f admet un unique point fixe sur $[a, b]$. On le note ℓ .
16. **Un point fixe attractif.**
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [a, b] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Un affaiblissement des hypothèses

On suppose dans cette sous-partie que la fonction f vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad (x \neq y) \Rightarrow (|f(y) - f(x)| < |y - x|)$$

17. Démontrer que la fonction f admet un unique point fixe sur $[a, b]$. On le note L .
18. Démontrer que toute suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [a, b] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

admet le réel L comme limite.

On utilisera sans démonstration le théorème de Bolzano-Weierstrass : toute suite bornée possède une sous-suite convergente.

Problème

Résultats admis

Tout au long du problème, on pourra utiliser les résultats suivants sans démonstration.

- Tout d'abord :

$$\operatorname{sh}(x) - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{6} \quad \text{et} \quad \operatorname{th}(x) - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^3}{3}$$

- Soit I un intervalle. Soit $x_0 \in \bar{I}$.
Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

La fonction f est dite dérivable en x_0 si et seulement si la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie en x_0 .

Si c'est le cas, cette limite est $f'(x_0)$.

Partie I : Fonction tangente hyperbolique

On définit la fonction tangente hyperbolique, notée th , par :

$$\operatorname{th} : x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$$

19. Justifier que la fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée dont on simplifiera l'expression au maximum.
20. Déterminer la parité de th .
21. Dresser, en justifiant, le tableau de variations complet de th .
22. Calculer $\operatorname{th}(0)$, puis déterminer le signe de la fonction th sur $\mathbb{R}$.
23. Démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \operatorname{th}(x) < x$$

On pourra utiliser, après l'avoir démontré : $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2$.

Partie II : Un prolongement de fonction

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{x}$$

24. Démontrer que la fonction f est paire.
25. Démontrer que la fonction f est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, puis :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{x^2} (x - \operatorname{th}(x))$$

26. Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$. On notera à nouveau f ce prolongement.
27. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer une équation de la tangente à la courbe de f en 0.
28. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Partie III : Une équation différentielle

On souhaite déterminer toutes les fonctions y de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x y'(x) + y(x) = \operatorname{ch}(x) \quad (E)$$

29. Démontrer que si y est une solution de (E) , alors : $y(0) = 1$.

30. Montrer que la fonction f , définie dans la partie précédente, est une solution particulière de (E) .

31. (*) Résoudre l'équation homogène associée à (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

32. Démontrer que si une fonction y est une solution de (E) , alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = \frac{C}{x} + f(x)$$

33. Justifier, avec la question 29 : $C = 0$.

34. Conclure que la fonction f est l'unique solution de (E) .

Partie IV : Une suite implicite

35. Démontrer que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle que l'on déterminera. On note g sa bijection réciproque.

36. Déterminer, en le justifiant, la monotonie de g .

37. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n = g\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que vaut $f(x_n)$? Justifier.

38. Démontrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ainsi définie est décroissante.

39. Démontrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

40. Déterminer un équivalent de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.