DS4

> On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 5. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$2xy' + y \ = \ x^4 \qquad (E_1)$$

Démonstration.

- Tout d'abord :
  - × l'équation (E_1) est différentielle linéaire d'ordre 1.
    On note (H_1) son équation homogène associée et on remarque :

$$2xy' + y \ = \ 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*}} \quad \Leftrightarrow \quad y' + \frac{1}{2x}\ y \ = \ 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*}}$$

  - × une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2x}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ \ln(x)$.

> L'ensemble des solutions de l'équation (H_1) est donc :
> $$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ \ln(x)} \end{array} \ \middle|\ \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\, \dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{array} \ \middle|\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

- On note :

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{9}\ x^4 \end{array}$$

  - × La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
  - × Elle est de plus solution de (E_1). En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{array}{rcl} 2xf'(x) + f(x) & = & 2x \times \dfrac{4}{9}\ x^3 + \dfrac{1}{9}\ x^4 \\[2ex] & = & \dfrac{8}{9}\ x^4 + \dfrac{1}{9}\ x^4 \\[2ex] & = & x^4 \end{array}$$

> L'ensemble des solutions de (E_1) est : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{9}\ x^4 + \lambda\, \dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{array} \ \middle|\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Commentaire

- Il existe beaucoup de solutions particulières de (E_1) (une infinité non dénombrable plus précisément). Il suffit simplement d'en exhiber une. La recherche d'une solution particulière f peut donc s'effectuer au brouillon. On rédigera sur la copie seulement la démonstration que la fonction f est bien solution de (E_1).
- Détaillons l'obtention de la fonction f.
  Comme l'équation différentielle (E_1) n'est pas à coefficients constants, on applique la méthode de variation de la constante pour en déterminer une solution particulière.
  Soit λ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On note alors $f : x \mapsto \dfrac{\lambda(x)}{\sqrt{x}}$.
  La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
f \text{ est solution de } (E_1) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 2xf'(x) + f(x) = x^4 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 2\,\cancel{x}\ \frac{\lambda'(x) \times \sqrt{x} - \lambda(x) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\cancel{x}} + \frac{\lambda(x)}{\sqrt{x}} = x^4 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 2\sqrt{x}\ \lambda'(x) - \cancel{\frac{\lambda(x)}{\sqrt{x}}} + \cancel{\frac{\lambda(x)}{\sqrt{x}}} = x^4 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 2\sqrt{x}\ \lambda'(x) = x^4 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda'(x) = \frac{x^4}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{\frac{7}{2}}
\end{aligned}$$

  On en déduit que la fonction λ cherchée peut être choisie parmi les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ x^{\frac{7}{2}}$.
  La fonction $\lambda : x \mapsto \dfrac{1}{9}\ x^{\frac{9}{2}}$ convient.
  Ainsi la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\frac{1}{9}\ x^{\frac{9}{2}}}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{9}\ x^4$ est une solution particulière de (E_1).

□

2. $(*)$ Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y'' - 6y' + 9y \ = \ (x+1)\,\mathrm{e}^{x} \qquad (E_2)$$

Démonstration.

- Tout d'abord :
  - × l'équation (E_2) est différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
    On note (H_2) son équation homogène associée.
  - × on cherche ensuite les racines du polynôme P défini par : $P(X) = X^2 - 6X + 9 = (X-3)^2$.
    Le réel 3 est donc l'unique racine (double) de P.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'ensemble des solutions de } (H_2) \text{ est donc :} \\ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda_1\,\mathrm{e}^{3x} + \lambda_2\,x\,\mathrm{e}^{3x} \end{array} \ \middle|\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.\end{array}}$$

- On note ensuite :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{4}\,(x+2)\,\mathrm{e}^x \end{array}$$

  × La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

  × Elle est de plus solution de (E_2). En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) - 6f'(x) + 9f(x) \;=\; \frac{1}{4}\,(x+4)\,\mathrm{e}^x - 6\,\frac{1}{4}\,(x+3)\,\mathrm{e}^x + 9\,\frac{1}{4}(x+2)\,\mathrm{e}^x \;=\; (x+1)\,\mathrm{e}^x$$

L'ensemble des solutions de (E_2) est donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{4}\,(x+2)\,\mathrm{e}^x + \lambda_1\,\mathrm{e}^{3x} + \lambda_2\,x\,\mathrm{e}^{3x} \end{array} \;\middle|\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Commentaire

- Il existe beaucoup de solutions particulières de (E_1) (une infinité non dénombrable plus précisément). Il suffit simplement d'en exhiber une. La recherche d'une solution particulière f peut donc s'effectuer au brouillon. On rédigera sur la copie seulement la démonstration que la fonction f est bien solution de (E_1).
- Détaillons l'obtention de la fonction f.
  Comme le second membre de l'équation (E_2) est $x \mapsto (x+1)\,\mathrm{e}^{1\times x}$ et que 1 n'est pas racine du polynôme P, alors on cherche une solution particulière de (E_2) sous la forme $x \mapsto (ax+b)\,\mathrm{e}^x$.
  Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On note $f : x \mapsto (ax+b)\,\mathrm{e}^x$.
  La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & a\,\mathrm{e}^x + (ax+b)\,\mathrm{e}^x \;=\; (ax+a+b)\,\mathrm{e}^x \\ f''(x) & = & a\,\mathrm{e}^x + (ax+a+b)\,\mathrm{e}^x \;=\; (ax+2a+b)\,\mathrm{e}^x \end{array}$$

  On remarque alors :

$$\begin{array}{cl} & f \text{ solution de } (E_2) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - 6f'(x) + 9f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^x \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ (ax+2a+b)\,\mathrm{e}^x - 6(ax+a+b)\,\mathrm{e}^x + 9(ax+b)\,\mathrm{e}^x = (x+1)\,\mathrm{e}^x \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ (4ax - 4a + 4b)\,\mathrm{e}^x = (x+1)\,\mathrm{e}^x \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ 4ax - 4a + 4b = x+1 \qquad \textit{(car : } \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \neq 0\textit{)} \\ \Leftrightarrow & 4aX - 4a + 4b = X + 1 \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 4a & & & = & 1 \\ -4a & + & 4b & = & 1 \end{array} \right. \\ \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcl} 4a & = & 1 \\ 4b & = & 2 \end{array} \right. \end{array}$$

  Ainsi, la fonction $f : x \mapsto \left(\dfrac{1}{4}\,x + \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^x$ est une solution particulière de (E_2).

□

3. On note E l'ensemble des fonctions définies sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et bornées.
Pour tout $f \in E$, on note : $A_f = \{ \left|f(x)\right| \mid x \in [0,1]\}$.
Pour tout $f \in E$, on note : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|f(x)\right| = \sup(A_f)$.

a) Que signifie $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E ?

Démonstration.
L'application $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E si elle vérifie les propriétés suivantes :

1) **Séparation** :
$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = 0 \ \Leftrightarrow \ f = 0_{\mathbb{R}^{[0,1]}}$$

2) **Homogénéité** :
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall f \in E, \quad \|\lambda \cdot f\|_\infty \ = \ |\lambda| \times \|f\|_\infty$$

3) **Inégalité triangulaire** :
$$\forall (f,g) \in E^2, \quad \|f+g\|_\infty \ \leqslant \ \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$
□

b) Démontrer que $\|\cdot\|_\infty$ est homogène.

Démonstration.

- Tout d'abord, remarquons que, pour tout $f \in E$, la quantité $\|f\|_\infty$ est bien définie.
En effet, comme f est bornée, alors $|f|$ est majorée. Ainsi l'ensemble $A_f = \{ \left|f(x)\right| \mid x \in [0,1]\}$ est inclus dans $\mathbb{R}$, non vide et majoré. On en déduit que $\sup(A_f)$ existe.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $f \in E$.
On commence par remarquer que $\lambda \cdot f \in E$. Ainsi $\|\lambda \cdot f\|_\infty$ est bien définie.
Deux cas se présentent.
  - Si $\lambda = 0$, alors :
    × d'une part : $\|0 \cdot f\|_\infty = \|0_E\| = 0$ (d'après ***1.***)
    × d'autre part : $|0| \times \|f\|_\infty = 0$.

    L'égalité souhaitée est donc vraie pour $\lambda = 0$.
  - Si $\lambda \neq 0$. Soit $x \in [0,1]$. On remarque tout d'abord :
$$\left|\lambda \times f(x)\right| \ = \ |\lambda| \times \left|f(x)\right| \qquad (*)$$
    On procède ensuite par double inégalité.
    $(\leqslant)$ Le réel $\|f\|_\infty$ est un majorant de A_f. Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$:
$$\left|f(x)\right| \ \leqslant \ \|f\|_\infty$$
    Comme $|\lambda| \geqslant 0$, on en déduit :
$$\begin{array}{ccc} |\lambda| \times \left|f(x)\right| & \leqslant & |\lambda| \times \|f\|_\infty \\ \parallel & & \\ \left|\lambda \times f(x)\right| & & \end{array}$$
    D'où :
$$\forall x \in [0,1], \quad \left|(\lambda \cdot f)(x)\right| \ \leqslant \ |\lambda| \times \|f\|_\infty$$
    Ainsi, $|\lambda|\ \|f\|_\infty$ est un majorant de $A_{\lambda \cdot f}$.
    Or $\|\lambda \cdot f\|_\infty$ est le plus petit des majorants de $A_{\lambda \cdot f}$. On en conclut :
$$\|\lambda \cdot f\|_\infty \ \leqslant \ |\lambda|\, \|f\|_\infty$$

($\geqslant$) Le réel $\|\lambda \cdot f\|_\infty$ est un majorant de $A_{\lambda \cdot f}$. Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\begin{array}{rcl} & & \big|(\lambda \cdot f)(x)\big| \quad \leqslant \quad \|\lambda \cdot f\|_\infty \\ & & \shortparallel \\ |\lambda| \times \big|f(x)\big| & = & \big|\lambda \times f(x)\big| \end{array}$$

Comme $|\lambda| > 0$, on en déduit :

$$\forall x \in [0,1], \quad \big|f(x)\big| \ \leqslant \ \frac{1}{|\lambda|} \ \|\lambda \cdot f\|_\infty$$

Ainsi, $\dfrac{1}{|\lambda|} \ \|\lambda \cdot f\|_\infty$ est un majorant de A_f.
Or $\|f\|_\infty$ est le plus petit des majorants de A_f. On en conclut :

$$\|f\|_\infty \ \leqslant \ \frac{1}{|\lambda|} \ \|\lambda \cdot f\|_\infty$$

Comme $|\lambda| > 0$, on obtient : $|\lambda| \times \|f\|_\infty \leqslant \|\lambda \cdot f\|_\infty$.

□

4. Énoncer et démontrer le théorème d'encadrement.

Démonstration.

- Énonçons le théorème d'encadrement.
  Soit $(u, v, w) \in \big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big)^3$.
  Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

  Supposons que :
  × la suite (u_n) est convergente, de limite ℓ.
  × la suite (w_n) est convergente, de même limite ℓ.
  × il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_1, \ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

  Alors la suite (v_n) est convergente de limite ℓ.
- Démontrons maintenant ce théorème.
  Supposons que :
  × la suite (u_n) est convergente, de limite ℓ.
  × la suite (w_n) est convergente, de même limite ℓ.
  × il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_1, \ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

  Démontrons que la suite (v_n) converge vers ℓ. Autrement dit :

  $$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geqslant n_0, \ |v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

  Soit $\varepsilon > 0$.
  ▸ Comme $u_n \to \ell$, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_2, \ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
  Autrement dit : $\forall n \geqslant n_2, \ \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$.
  ▸ Comme $w_n \to \ell$, il existe un rang $n_3 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_3, \ |w_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
  Autrement dit : $\forall n \geqslant n_3, \ \ell - \varepsilon \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon$.
  ▸ De plus : $\forall n \geqslant n_1, \ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

On note $n_0 = \max(n_1, n_2, n_3)$.
Soit $n \geqslant n_0$.

- Comme $n \geqslant n_0 \geqslant n_1$, alors :
$$u_n \ \leqslant \ v_n \ \leqslant \ w_n$$
- Comme $n \geqslant n_0 \geqslant n_2$, alors :
$$\ell - \varepsilon \ \leqslant \ u_n \ \leqslant \ v_n \ \leqslant \ w_n$$
- Comme $n \geqslant n_0 \geqslant n_3$, alors :
$$\ell - \varepsilon \ \leqslant \ u_n \ \leqslant \ v_n \ \leqslant \ w_n \ \leqslant \ \ell + \varepsilon$$

On en déduit : $\ell - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant \ell + \varepsilon$. Autrement dit : $|v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

$\square$

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note I_n la fonction définie par :

$$I_n : x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^n(t)}\, dt$$

5. Justifier que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n(x)$ est bien définie.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
La fonction $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}^n(t)}$ est continue sur le `SEGMENT` $[0, x]$ car elle est l'inverse de la fonction $g_n : t \mapsto \mathrm{ch}^n(t)$ qui :
- × est continue sur $[0, x]$,
- × `NE S'ANNULE PAS` sur $[0, x]$.

$$\boxed{\text{L'intégrale } I_n(x) \text{ est donc bien définie.}}$$

□

6. Soit $x \in \mathbb{R}$.

a) Calculer $I_0(x)$ et $I_2(x)$.

Démonstration.
- Tout d'abord :

$$I_0(x) = \int_0^x \frac{1}{\big(\mathrm{ch}(t)\big)^0}\, dt = \int_0^x 1\, dt = [\ t\ ]_0^x = x$$

$$\boxed{I_0(x) = x}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned}
I_2(x) &= \int_0^x \frac{1}{\big(\mathrm{ch}(t)\big)^2}\, dt \\
&= \int_0^x \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^2}\, dt \\
&= \int_0^x \frac{4}{(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})^2}\, dt \\
&= 4 \int_0^x \frac{1}{\mathrm{e}^{2t} + 2 + \mathrm{e}^{-2t}}\, dt \\
&= 4 \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{u^2 + 2 + \frac{1}{u^2}} \times \frac{1}{u}\, du && \textit{(avec le changement de variable } \boxed{u = e^t}\textit{)} \\
&= 4 \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{u^3 + 2u + \frac{1}{u}}\, du \\
&= 4 \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{u}{u^4 + 2u^2 + 1}\, du \\
&= 4 \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{u}{(u^2 + 1)^2}\, du
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{array}{rcl} I_2(x) & = & 4\ \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^x} 2u\,(u^2+1)^{-2}\ du \\ & = & 2\ \left[\ \dfrac{1}{-2+1}\ (u^2+1)^{-2+1}\ \right]_1^{\mathrm{e}^x} \\ & = & 2\ \left[\ -\dfrac{1}{u^2+1}\ \right]_1^{\mathrm{e}^x} \\ & = & 2\left(-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}+1}+\dfrac{1}{2}\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } I_2(x) = 1 - \dfrac{1}{2\,(\mathrm{e}^{2x}+1)}.}$$

□

b) Montrer, à l'aide du changement de variable $u = e^t$: $I_1(x) = 2\arctan(\mathrm{e}^x) - \dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration.
On calcule :

$$\begin{array}{rcll} I_1(x) & = & \displaystyle\int_0^x \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)}\ dt & \\ & = & \displaystyle\int_0^x \dfrac{2}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}\ dt & \\ & = & 2\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^x} \dfrac{1}{u+\frac{1}{u}} \times \dfrac{1}{u}\ du & \textit{(avec le changement de variable } \boxed{u = e^t}\textit{)} \\ & = & 2\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^x} \dfrac{1}{u^2+1}\ du & \\ & = & 2\ [\ \arctan(u)\ ]_1^{\mathrm{e}^x} & \\ & = & 2\,(\arctan(\mathrm{e}^x) - \arctan(1)) & \\ & = & 2\left(\arctan(\mathrm{e}^x) - \dfrac{\pi}{4}\right) & \textit{(car : } \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } I_1(x) = 2\ \arctan(\mathrm{e}^x) - \dfrac{\pi}{2}.}$$

□

7. a) Démontrer, pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$: $\arctan(u) + \arctan\left(\dfrac{1}{u}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration.
On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g : u \mapsto \arctan(u) + \arctan\left(\dfrac{1}{u}\right)$$

- La fonction $h : u \mapsto \arctan\left(\dfrac{1}{u}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est la composée $h = h_2 \circ h_1$ de :
  - × $h_1 : u \mapsto \dfrac{1}{u}$ qui :
    - est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,
    - vérifie : $h_1(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}$,
  - × $h_2 = \arctan$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, d'après la question précédente.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est donc dérivable sur } \mathbb{R} \text{ car elle est la somme de fonctions dérivables sur } \mathbb{R}.}$$

- Soit $u \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} g'(u) & = & \arctan'(u) + h'(u) \\ & = & \dfrac{1}{1+u^2} + \left(-\dfrac{1}{u^2}\right) \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2} \\ & = & \dfrac{1}{1+u^2} - \dfrac{1}{u^2\left(1+\frac{1}{u^2}\right)} \\ & = & \dfrac{1}{1+u^2} - \dfrac{1}{u^2+1} \\ & = & 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } g \text{ est constante sur } \mathbb{R}.}$$

- Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(u) \ = \ \lambda$$

  Enfin :
  - × d'une part : $\lim\limits_{u \to +\infty} \arctan(u) = \dfrac{\pi}{2}$.
  - × d'autre part : $\arctan(0) = 0$.
    En particulier, comme la fonction arctan est continue en 0 : $\lim\limits_{u \to 0} \arctan(u) = \arctan(0) = 0$.

  On en déduit :

$$\lim_{u \to +\infty} g(u) \ = \ \frac{\pi}{2} + 0 \ = \ \frac{\pi}{2}$$

  Or : $\lim\limits_{u \to +\infty} g(u) = \lambda$. Ainsi, la fonction g est constante égale $\dfrac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\text{Autrement dit : } \forall u \in \mathbb{R}_+^*, \ \arctan(u) + \arctan\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2}.}$$

□

b) En déduire que la fonction I_1 est impaire.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord : $-x \in \mathbb{R}$.
- Ensuite :

$$\begin{array}{rcll} I_1(-x) & = & 2\arctan(e^{-x}) - \dfrac{\pi}{2} & \textit{(d'après 6b)} \\ & = & 2\arctan\left(\dfrac{1}{e^x}\right) - \dfrac{\pi}{2} & \\ & = & 2\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan(e^x)\right) - \dfrac{\pi}{2} & \textit{(d'après la question précédente, car : } e^x \in \mathbb{R}_+^*\textit{)} \end{array}$$

Ainsi :

$$I_1(-x) \ = \ \pi - 2\ \arctan(\mathrm{e}^x) - \frac{\pi}{2} \ = \ \frac{\pi}{2} - 2\ \arctan(\mathrm{e}^x) \ = \ -I_1(x)$$

$$\boxed{\text{La fonction } I_1 \text{ est donc impaire.}}$$

□

c) Démontrer que la fonction I_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- La fonction $g : x \mapsto \arctan(\mathrm{e}^x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $g = g_2 \circ g_1$ de :
  - × $g_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x$ qui :
    - est dérivable sur $\mathbb{R}$,
    - vérifie : $g_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
  - × $g_2 = \arctan$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= g_1'(x) \times g_2'\big(g_1(x)\big) \\ &= \mathrm{e}^x \times \frac{1}{1 + (\mathrm{e}^x)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^{2x}} \ > \ 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } I_1 \text{ est donc strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

□

8. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer :

$$(n+1)\, I_{n+2}(x) \ = \ n\, I_n(x) + \frac{\mathrm{th}(x)}{\mathrm{ch}^n(x)}$$

(On pourra remarquer, au choix : $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^n(t)} = \dfrac{\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{ch}^{n+1}(t)}$ *ou* $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^{n+2}(t)} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(t)\,\mathrm{ch}^n(t)}$*.)*

Démonstration.
On remarque :

$$\begin{aligned} & I_n(x) \\ = \ & \int_0^x \frac{1}{\big(\mathrm{ch}(t)\big)^n}\ dt \\ = \ & \int_0^x \mathrm{ch}(t) \times \frac{1}{\big(\mathrm{ch}(t)\big)^{n+1}}\ dt && \textit{(d'après la remarque de l'énoncé)} \\ = \ & \left[\mathrm{sh}(t) \times \frac{1}{\big(\mathrm{ch}(t)\big)^{n+1}}\right]_0^x - \int_0^x \mathrm{sh}(t) \times \left(-(n+1)\ \frac{\mathrm{sh}(t)}{\big(\mathrm{ch}(t)\big)^{n+2}}\right) dt && \textit{(par intégration par parties)} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
I_n(x) &= \frac{\mathrm{sh}(x)}{\big(\mathrm{ch}(x)\big)^{n+1}} - \cancel{\frac{\mathrm{sh}(0)}{\big(\mathrm{ch}(0)\big)^{n+1}}} + (n+1) \int_0^x \frac{\big(\mathrm{sh}(t)\big)^2}{\big(\mathrm{ch}(t)\big)^{n+2}}\, dt \\
&= \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \times \frac{1}{\mathrm{ch}^n(x)} + (n+1) \int_0^x \frac{\big(\mathrm{ch}(t)\big)^2 - 1}{\big(\mathrm{ch}(t)\big)^{n+2}}\, dt && \textit{(car : } \mathrm{ch}^2(t) - \mathrm{sh}^2(t) = 1\textit{)} \\
&= \mathrm{th}(x)\, \frac{1}{\mathrm{ch}^n(x)} + (n+1) \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^n(t)} - \frac{1}{\mathrm{ch}^{n+2}(t)}\, dt \\
&= \frac{\mathrm{th}(x)}{\mathrm{ch}^n(x)} + (n+1) \left(\int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^n(t)}\, dt - \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^{n+2}(t)}\, dt \right) && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \frac{\mathrm{th}(x)}{\mathrm{ch}^n(x)} + (n+1)\, \big(I_n(x) - I_{n+2}(x)\big)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
I_n(x) &= \frac{\mathrm{th}(x)}{\mathrm{ch}^n(x)} + (n+1)\, I_n(x) - (n+1)\, I_{n+2}(x) \\
\text{donc} \quad (n+1)\, I_{n+2}(x) &= \frac{\mathrm{th}(x)}{\mathrm{ch}^n(x)} + n\, I_n(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } (n+1)\, I_{n+2}(x) = n\, I_n(x) + \frac{\mathrm{th}(x)}{\mathrm{ch}^n(x)}.}$$

□

b) En déduire les expressions de $I_3(x)$ et $I_4(x)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$(1+1)\, I_{1+2}(x) = 1 \times I_1(x) + \frac{\mathrm{th}(x)}{\mathrm{ch}^1(x)}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
I_3(x) &= \frac{1}{2} \left(I_1(x) + \frac{\mathrm{th}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(2\, \arctan(\mathrm{e}^x) - \frac{\pi}{2} + \frac{\mathrm{th}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \right) && \textit{(d'après } \textbf{6b}\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient : } I_3(x) = \arctan(\mathrm{e}^x) - \frac{\pi}{4} + \frac{\mathrm{th}(x)}{2\, \mathrm{ch}(x)}.}$$

- Ensuite :

$$(2+1)\, I_{2+2}(x) = 2 \times I_2(x) + \frac{\mathrm{th}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
I_4(x) &= \frac{2}{3}\, I_2(x) + \frac{\mathrm{th}(x)}{3\, \mathrm{ch}^2(x)} \\
&= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{2\, (\mathrm{e}^{2x} + 1)} \right) + \frac{\mathrm{th}(x)}{3\, \mathrm{ch}^2(x)} && \textit{(d'après } \textbf{6a}\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient : } I_4(x) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3\, (\mathrm{e}^{2x} + 1)} + \frac{\mathrm{th}(x)}{3\, \mathrm{ch}^n(x)}.}$$

□

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cette question, on étudie la fonction I_n.

a) Étudier la parité de la fonction I_n.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord : $-x \in \mathbb{R}$.
- Ensuite :

$$\begin{array}{rcll} I_n(-x) & = & \displaystyle\int_0^{-x} \frac{1}{\big(\operatorname{ch}(t)\big)^n}\, dt & \\ & = & \displaystyle\int_0^{x} \frac{1}{\big(\operatorname{ch}(-u)\big)^n}(-\, du) & \textit{(avec le changement de variable } \boxed{u = -t}\textit{)} \\ & = & -\displaystyle\int_0^{x} \frac{1}{\big(\operatorname{ch}(u)\big)^n}\, du & \textit{(par parité de } \operatorname{ch}\textit{)} \\ & = & -I_n(x) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{La fonction } I_n \text{ est donc impaire.}}$$

Commentaire

- La fonction I_n est une intégrale fonction de ses bornes. Pour démontrer l'imparité de ce type de fonctions, on pensera toujours à effectuer le changement de variable $\boxed{u = -t}$.
- Notons que ce résultat est (fort heureusement) cohérent avec celui de la question ***7b***.

$\square$

b) Démontrer que la fonction I_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, et expliciter sa dérivée I_n'.

Démonstration.
Par définition de la fonction I_n, cette fonction est la primitive de $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}^n(t)}$ qui s'annule en 0.

$$\boxed{\text{La fonction } I_n \text{ est donc dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et : } \forall x \in \mathbb{R},\ I_n'(x) = f_n(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^n(x)}.}$$

$\square$

c) Démontrer : $\forall t \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)} \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-t}$.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$. On remarque :

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)} \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-t} & \Leftrightarrow & \dfrac{\cancel{2}}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} \leqslant \cancel{2}\,\mathrm{e}^{-t} & \\ & \Leftrightarrow & 1 \leqslant \mathrm{e}^{-t}\left(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\right) & \textit{(car : } e^t + e^{-t} > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 1 \leqslant 1 + \mathrm{e}^{-2t} & \end{array}$$

Cette dernière assertion est vraie car : $\mathrm{e}^{-2t} \geqslant 0$.
Ainsi, par raisonnement par équivalence, la première aussi.

$$\boxed{\text{On en conlut : } \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-t}.}$$

$\square$

d) En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad I_n(x) \leqslant \frac{2^n}{n}(1 - \mathrm{e}^{-nx})$$

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente :

$$\begin{array}{lrcll} & \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)} & \leqslant & 2\,\mathrm{e}^{-t} & \\ \text{donc} & \left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)}\right)^n & \leqslant & (2\,\mathrm{e}^{-t})^n & \textit{(par croissance de } t \mapsto t^n \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\ \text{d'où} & \dfrac{1}{\mathrm{ch}^n(t)} & \leqslant & 2^n\,\mathrm{e}^{-nt} & \end{array}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
  Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant x$) :

$$\underbrace{\int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^n(t)}\, dt}_{= I_n(x)} \leqslant \int_0^x 2^n\,\mathrm{e}^{-nt}\, dt$$

  Or :

$$\int_0^x 2^n\,\mathrm{e}^{-nt}\, dt = 2^n \int_0^x \mathrm{e}^{-nt}\, dt = 2^n \left[\frac{1}{-n}\,\mathrm{e}^{-nt}\right]_0^x = -\frac{2^n}{n}\left(\mathrm{e}^{-nx} - \mathrm{e}^{-n\times 0}\right) = \frac{2^n}{n}\,(1-\mathrm{e}^{-nx})$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ I_n(x) \leqslant \frac{2^n}{n}\,(1 - \mathrm{e}^{-nx}).}$$

Commentaire

Le schéma de résolution de cette question est plutôt classique.

Afin d'encadrer une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$,

1) on cherche d'abord à encadrer l'intégrande, c'est-à-dire montrer :

$$\forall t \in [a,b],\ h_1(t) \leqslant f(t) \leqslant h_2(t)$$

où h_1 et h_2 sont deux fonctions définies sur $[a,b]$, déterminées grâce aux questions précédentes ou grâce à l'étude de f,

2) on utilise ensuite la croissance de l'intégrale (si les bornes a et b sont dans l'ordre croissant, c'est-à-dire $a \leqslant b$) pour conclure :

$$\int_a^b h_1(t)\, dt \leqslant \int_a^b f(t)\, dt \leqslant \int_a^b h_2(t)\, dt$$

On peut résumer ce schéma par la phrase suivante : pour encadrer une intégrale, on commence toujours par encadrer son intégrande.

□

e) Montrer que la fonction I_n est strictement croissante et majorée sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord, d'après la question ***9b***, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$I_n'(x) \;=\; \frac{1}{\mathrm{ch}^n(x)} \;>\; 0$$

$$\boxed{\text{La fonction } I_n \text{ est donc strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

- D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$I_n(x) \;\leqslant\; \frac{2^n}{n}\,(1 - \mathrm{e}^{-nx}) \;\leqslant\; \frac{2^n}{n} \qquad \textit{(car : } e^{-nx} \geqslant 0\textit{)}$$

  On en déduit que le réel $\dfrac{2^n}{n}$ est un majorant de I_n sur $\mathbb{R}_+$.
- De plus, la fonction I_n est croissante sur $\mathbb{R}$, ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad I_n(x) \;\leqslant\; I_n(0)$$

  On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}_-$:

$$I_n(x) \;\leqslant\; I_n(0) \;\leqslant\; \frac{2^n}{n}$$

  Le réel $\dfrac{2^n}{n}$ est donc aussi un majorant de I_n sur $\mathbb{R}_-$.

$$\boxed{\text{La fonction } I_n \text{ est donc majorée (par } \frac{2^n}{n}\text{) sur } \mathbb{R}.}$$

Commentaire

On prendra garde aux variables en jeu.

- Lorsque l'on doit trouver un majorant d'une **fonction** $f : x \mapsto \cdots$ définie sur $\mathbb{R}$, on doit trouver un réel M, <u>ne dépendant pas de x</u> vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\; f(x) \leqslant M$$

- Lorsque l'on doit trouver un majorant d'une **suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on doit trouver un réel M, <u>ne dépendant pas de n</u> vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\; u_n \leqslant M$$

Ici, la variable n est fixée et on cherche un majorant de la **fonction** I_n définie sur $\mathbb{R}$. Le réel que l'on doit proposer ne doit donc pas dépendre de x (mais il peut éventuellement dépendre de n, c'est le cas ici). □

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J_n = \lim\limits_{x \to +\infty} I_n(x)$.

(*l'existence de cette limite est garantie par la question* ***9e***).

a) Calculer J_1 et J_2.

Démonstration.

- D'après la question ***6b*** :

$$I_1 : x \mapsto 2 \arctan(\mathrm{e}^x) - \frac{\pi}{2}$$

Or, avec le changement de variable $\boxed{t = \mathrm{e}^x}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan(\mathrm{e}^x) \;=\; \lim_{t \to +\infty} \arctan(t) \;=\; \frac{\pi}{2}$$

Ainsi :

$$\lim_{x \to +\infty} I_1(x) \;=\; 2 \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \;=\; \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } J_1 = \frac{\pi}{2}.}$$

- D'après la question ***6a*** :

$$I_2 : x \mapsto 1 - \frac{1}{2\,(\mathrm{e}^{2x}+1)}$$

Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2\,(\mathrm{e}^{2x}+1)} = 0$. Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} I_2(x) = 1$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } J_2 = 1.}$$

□

b) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_{n+2} = \dfrac{n}{n+1}\, J_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***8a***, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(n+1)\, I_{n+2}(x) \;=\; n\, I_n(x) + \frac{\mathrm{th}(x)}{\mathrm{ch}^n(x)}$$

Ainsi :

$$I_{n+2}(x) \;=\; \frac{n}{n+1}\, I_n(x) + \frac{1}{n+1} \times \frac{\mathrm{th}(x)}{\mathrm{ch}^n(x)}$$

- On sait déjà :

$$J_{n+2} \;=\; \lim_{x \to +\infty} I_{n+2}(x) \qquad \text{et} \qquad J_n \;=\; \lim_{x \to +\infty} I_n(x)$$

Il reste donc à déterminer, si elle existe, la limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{\mathrm{th}(x)}{\mathrm{ch}^n(x)}$.

× Tout d'abord :

$$\mathrm{th}(x) \;=\; \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \;=\; \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} \;=\; 1$$

× De plus :

$$\mathrm{ch}^n(x) \;=\; \big(\mathrm{ch}(x)\big)^n \;=\; \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^n \;=\; \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})}{2^n} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{(\mathrm{e}^x)^n}{2^n} \;=\; \frac{\mathrm{e}^{nx}}{2^n}$$

On en déduit :
$$\frac{1}{n+1} \times \frac{\mathrm{th}(x)}{\mathrm{ch}^n(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{\frac{\mathrm{e}^{nx}}{2^n}} = \frac{2^n}{(n+1)\,\mathrm{e}^{nx}}$$

Or, deux fonction équivalentes ont même limite et : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^n}{(n+1)\,\mathrm{e}^{nx}} = 0$. Ainsi :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n+1} \times \frac{\mathrm{th}(x)}{\mathrm{ch}^n(x)} = 0$$

- On en conclut :
$$\begin{array}{ccccc} I_{n+2}(x) & = & \dfrac{n}{n+1}\, I_n(x) & + & \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{\mathrm{th}(x)}{\mathrm{ch}^n(x)} \\ {\scriptstyle x\to+\infty}\downarrow & & {\scriptstyle x\to+\infty}\downarrow & & {\scriptstyle x\to+\infty}\downarrow \\ J_{n+2} & = & \dfrac{n}{n+1}\, J_n & + & 0 \end{array}$$
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_{n+2} = \frac{n}{n+1}\, J_n}$$
□

c) Montrer par récurrence :
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad J_{2p+1} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad J_{2p+2} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(p)$ où $\mathcal{P}(p)$: $J_{2p+1} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$ et $J_{2p+2} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

▸ **Initialisation** :
D'après la question ***10a*** :
- × d'une part :
$$J_{2\times 0+1} = J_1 = \frac{\pi}{2}$$
Or :
$$\frac{(2\times 0)!}{2^{2\times 0}(0!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{0!}{2^0 \times 1^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$
Ainsi : $J_{2\times 0+1} = \dfrac{(2\times 0)!}{2^{2\times 0}(0!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.
- × d'autre part :
$$J_{2\times 0+2} = J_2 = 1$$
Or :
$$\frac{2^{2\times 0}(0!)^2}{(2\times 0+1)!} = \frac{2^0 \times 1}{1} = 1$$
Ainsi : $J_{2\times 0+2} = \dfrac{2^{2\times 0}(0!)^2}{(2\times 0+1)!}$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $p \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(p)$ et démontrons : $\mathcal{P}(p+1)$ (*i.e.* $J_{2(p+1)+1} = \dfrac{\big(2(p+1)\big)!}{2^{2(p+1)}\,\big((p+1)!\big)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$ et $J_{2(p+1)+2} = \dfrac{2^{2(p+1)}\,\big((p+1)!\big)^2}{\big(2(p+1)+1\big)!}$).

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
J_{2(p+1)+1} &= J_{(2p+1)+2} \\
&= \frac{2p+1}{(2p+1)+1}\, J_{2p+1} && \textit{(d'après la question précédente appliquée à } n = 2p+1\textit{)} \\
&= \frac{2p+1}{2p+2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{2p+1}{2\,(p+1)} \times \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2p+1)!}{2^{2p+1}\,(p+1)\,(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\frac{\big(2(p+1)\big)!}{2^{2(p+1)}\,\big((p+1)!\big)^2} \times \frac{\pi}{2} &= \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}\,\big((p+1)!\big)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2p+2)\,\big(2p+1\big)!}{2^{2p+2}\,\big((p+1)\,(p!)\big)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\cancel{2} \times \cancel{(p+1)} \times (2p+1)!}{\cancel{2} \times 2^{2p+1} \times (p+1)^{\cancel{2}} \times (p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2p+1)!}{2^{2p+1}\,(p+1)\,(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi : $J_{2(p+1)+1} = \dfrac{\big(2(p+1)\big)!}{2^{2(p+1)}\,\big((p+1)!\big)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$

- Ensuite :

$$\begin{aligned}
J_{2(p+1)+2} &= J_{(2p+2)+2} \\
&= \frac{2p+2}{(2p+2)+1}\, J_{2p+2} && \textit{(d'après la question précédente appliquée à } n = 2p+2\textit{)} \\
&= \frac{2p+2}{2p+3} \times \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{(2p+2)^2}{(2p+3)\,(2p+2)} \times \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \\
&= \frac{\big(2\,(p+1)\big)^2 \times 2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+3)!} \\
&= \frac{2^2\,(p+1)^2 \times 2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+3)!}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} J_{2(p+1)+2} &= \frac{2^2\,(p+1)^2 \times 2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+3)!} \\ &= \frac{2^{2p+2}\,\big((p+1)\,(p!)\big)^2}{(2p+3)!} \\ &= \frac{2^{2p+2}\,\big((p+1)!\big)^2}{(2p+3)!} \\ &= \frac{2^{2(p+1)}\,\big((p+1)!\big)^2}{\big(2(p+1)+1\big)!} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(p+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall p \in \mathbb{N},\ J_{2p+1} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \text{ et } J_{2p+2} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.}$$ $\square$

Problème : Méthode de Héron

Dans tout ce problème, on désigne par a un nombre réel strictement positif fixé, et on considère la **suite de Héron** associée à a, i.e. la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

Partie 1 - Étude d'une fonction.

On considère l'application f définie par :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right) \end{array}$$

11. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer sa dérivée.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est la combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$f'(x) \;=\; \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right) \;=\; \frac{1}{2} \times \frac{x^2 - a}{x^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } f \text{ est donc dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et :} \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{x^2 - a}{2\,x^2}\end{array}}$$

□

12. a) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) \;=\; \frac{x^2 - a}{2\,x^2}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{array}{rcll} f'(x) > 0 & \Leftrightarrow & x^2 - a > 0 & \textit{(car : } 2x^2 \geqslant 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & x^2 > a & \\ & \Leftrightarrow & x > \sqrt{a} & \textit{(par stricte croissance de } \sqrt{\cdot} \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \end{array}$$

- On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{a}$	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - × Tout d'abord :

$$f(\sqrt{a}) \;=\; \frac{1}{2}\left(\sqrt{a}+\frac{a}{\sqrt{a}}\right) \;=\; \frac{1}{2}\,(\sqrt{a}+\sqrt{a}) \;=\; \frac{1}{2}\,2\sqrt{a} \;=\; \sqrt{a}$$

  - × Ensuite :

$$\lim_{x\to 0} x \;=\; 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{a}{x} \;=\; +\infty \qquad \textit{(car : } a>0\textit{)}$$

    Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
  - × Enfin :

$$\lim_{x\to +\infty} x \;=\; +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{a}{x} \;=\; 0$$

    Ainsi : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

□

b) L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Expliciter $f(\mathbb{R}_+^*)$.

Démonstration.

- La fonction f n'est pas injective. En effet :
  - × d'une part :

$$f\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right) \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{a}}{2}+\frac{a}{\frac{\sqrt{a}}{2}}\right) \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{a}}{2}+2\sqrt{a}\right) \;=\; \frac{3}{4}\sqrt{a}$$

  - × d'autre part :

$$f\left(2\sqrt{a}\right) \;=\; \frac{1}{2}\left(2\sqrt{a}+\frac{a}{2\sqrt{a}}\right) \;=\; \frac{1}{2}\left(2\sqrt{a}+\frac{\sqrt{a}}{2}\right) \;=\; \frac{3}{4}\sqrt{a}$$

  Ainsi :

$$f\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right) \;=\; f(2\sqrt{a}) \qquad \texttt{ET} \qquad \frac{\sqrt{a}}{2} \;\neq\; 2\sqrt{a}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est pas injective.}}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est donc pas bijective.}}$$

- La fonction f n'est pas surjective car le réel 0 n'admet pas d'antécédent. En effet, comme $\sqrt{a}$ est le minimum global de f sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*, \quad f(x) \;>\; \sqrt{a} \;>\; 0$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est pas surjective.}}$$

$$\boxed{\text{D'après le tableau de variations : } f(\mathbb{R}_+^*) = [\sqrt{a}, +\infty[.}$$

Commentaire

Détaillons l'obtention de $f(\mathbb{R}_+^*)$.

$$\begin{array}{rcll} f(\mathbb{R}_+^*) & = & f\big(]0,\sqrt{a}] \cup]\sqrt{a},+\infty[\big) & \\ & = & f\big(]0,\sqrt{a}]\big) \cup f\big(]\sqrt{a},+\infty[\big) & \\ & = & [f\big(\sqrt{a}\big), \lim\limits_{x\to 0} f(x)[\cup]f(\sqrt{a}), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[& \textit{(par théorème de la bijection)} \\ & = & [\sqrt{a},+\infty[\cup]\sqrt{a},+\infty[& \\ & = & [\sqrt{a},+\infty[& \end{array}$$

□

13. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer le signe de $f(x) - x$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$f(x) - x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) - x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x} - 2x\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x} - x\right)$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} f(x) - x > 0 & \Leftrightarrow & \dfrac{a}{x} - x > 0 & \textit{(car : } \dfrac{1}{2} > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{a}{x} > x & \\ & \Leftrightarrow & a > x^2 & \textit{(car : } x > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \sqrt{a} > x & \textit{(par stricte croissance de } \sqrt{\cdot} \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \begin{cases} \forall x \in]0,\sqrt{a}[, \ f(x) - x > 0 \\ \forall x \in [\sqrt{a},+\infty[, \ f(x) - x \leqslant 0 \end{cases}.}$$

□

b) Expliciter les points fixes de la fonction f.

Démonstration.
Chercher les points fixes de la fonction f revient à déterminer les réels x vérifiant : $f(x) = x$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{array}{rcll} f(x) = x & \Leftrightarrow & f(x) - x = 0 & \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{x} - x\right) = 0 & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & \Leftrightarrow & \sqrt{a} = x & \textit{(avec un raisonnement similaire à celui de la question précédente)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet } \sqrt{a} \text{ comme unique point fixe.}}$$

□

14. ***a)*** Montrer que le graphe de f admet une asymptote en $+\infty$, dont on donnera une équation.

Démonstration.
Démontrer que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ revient à démontrer :

$$f(x) - (ax + b) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

On remarque, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \;=\; \frac{1}{2}\,x + \frac{a}{2x}$$

Donc :

$$f(x) - \frac{1}{2}\,x \;=\; \frac{a}{2x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{\text{La droite d'équation } y = \frac{1}{2}\,x \text{ est donc asymptote à la courbe de } f \text{ en } +\infty.}$$

□

b) Étudier la position du graphe de f par rapport à cette asymptote.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

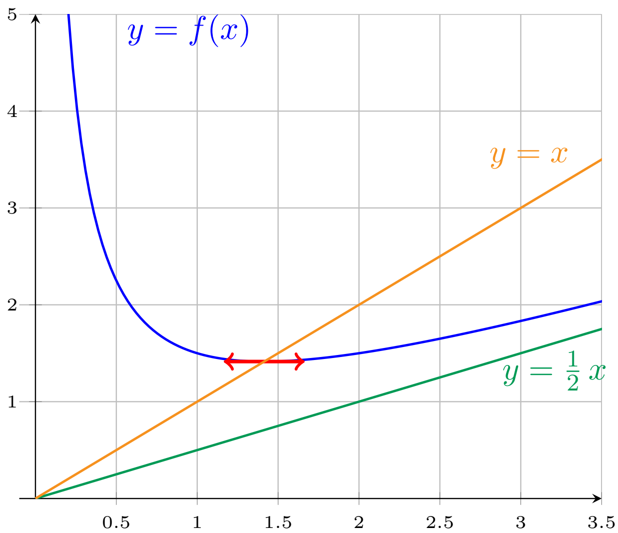
$$f(x) - \frac{1}{2}\,x \;=\; \frac{a}{2x} \;>\; 0$$

$$\boxed{\text{La courbe de } f \text{ est donc située au dessus de son asymptote } y = \frac{1}{2}\,x.}$$

□

15. Tracer l'allure du graphe de f dans le plan. On fera apparaître sur le graphique les asymptotes du graphe de f, ses éventuelles tangentes horizontales, ainsi que la première bissectrice du repère.

Démonstration.



□

Partie 2 - Étude de la suite de Héron

16. Calculer u_1 et u_2 en fonction de a.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{a}{u_0}\right) = \frac{1}{2}(1+a)$$

$$\boxed{u_1 = \frac{1+a}{2}}$$

- Ensuite :

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{a}{u_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+a}{2} + \frac{2a}{1+a}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{(1+a)^2+4a}{2\,(1+a)} = \frac{1+2a+a^2+4a}{4\,(1+a)}$$

$$\boxed{u_2 = \frac{a^2+6a+1}{4\,(1+a)}}$$

□

17. Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, et : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [\sqrt{a}, +\infty[$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \left\{\begin{array}{l} u_n \text{ bien défini} \\ u_n \in [\sqrt{a}, +\infty[\end{array}\right.$

▸ **Initialisation** :

- D'après la question précédente, u_1 est bien défini.
- De plus : $u_1 = f(u_0)$. Or : $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Donc : $u_1 = f(u_0) \in f(\mathbb{R}_+^*)$.
  D'après la question ***12b*** : $f(\mathbb{R}_+^*) = [\sqrt{a}, +\infty[$. Ainsi : $u_1 \in [\sqrt{a}, +\infty[$.

D'où $\mathcal{P}(1)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} \text{ bien défini} \\ u_{n+1} \in [\sqrt{a}, +\infty[\end{array}\right.$)

- Tout d'abord, par hypothèse de récurrence, le réel u_n est bien défini et : $u_n \geqslant \sqrt{a}$.
  Or : $\sqrt{a} > 0$. On en déduit : $u_n \neq 0$.
  AInsi, le réel $\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$ est bien défini, et donc u_{n+1} aussi.
- Ensuite : $u_{n+1} = f(u_n)$. Or : $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ d'après le point précédent. Donc : $u_{n+1} = f(u_n) \in f(\mathbb{R}_+^*)$.
  D'après la question ***12b*** : $f(\mathbb{R}_+^*) = [\sqrt{a}, +\infty[$. Ainsi : $u_{n+1} \in [\sqrt{a}, +\infty[$.

D'où $\mathcal{P}(n+1)$

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left\{\begin{array}{l} u_n \text{ bien défini} \\ u_n \in [\sqrt{a}, +\infty[\end{array}\right.$.

Enfin, le réel u_0 est bien défini d'après l'énoncé.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie et : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in [\sqrt{a}, +\infty[.}$$

Commentaire

On prendra garde à bien poser la récurrence.

- On ne peut commencer en écrivant « Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \begin{cases} u_n \text{ bien défini} \\ u_n \in [\sqrt{a}, +\infty[\end{cases}$ ».

  En effet, d'après l'énoncé : $u_0 = 1$. Ainsi, suivant la valeur de a, la propriété suivante n'est pas toujours vérifiée : $u_0 \in [\sqrt{a}, +\infty[$.
  L'initialisation de cette récurrence ($\mathcal{P}(0)$) n'est donc pas toujours vraie. Cela justifie le fait que l'on initialise la récurrence à 1 et non 0.

- En initialisant la récurrence à 1, on ne démontre par que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, mais que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.
  Pour conclure quant à la bonne définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il faut donc :
  × démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, ce qui est effectué avec la récurrence,
  × préciser que le réel u_0 est lui aussi bien défini.

□

18. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 1.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_{n+1} - u_n \ = \ f(u_n) - u_n$$

Or, d'après la question précédente : $u_n \in [\sqrt{a}, +\infty[$.
Ainsi, d'après la question ***13a*** : $f(u_n) - u_n \leqslant 0$. D'où :

$$u_{n+1} - u_n \ \leqslant \ 0$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc décroissante à partir du rang 1.}}$$

□

19. Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite $\sqrt{a}$.

Démonstration.
La suite (u_n) est :

× décroissante à partir du rang 1, d'après la question précédente,
× minorée par $\sqrt{a}$, d'après la question ***17***.

Elle converge donc vers une limite ℓ vérifiant : $\ell \geqslant \sqrt{a}$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente.}}$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ {\scriptstyle n\to+\infty}\downarrow & & {\scriptstyle n\to+\infty}\downarrow \\ \ell & = & f(\ell) \end{array}$$

Le réel ℓ est donc un point fixe de f.
Or, d'après la question ***13b***, l'unique point fixe de f est $\sqrt{a}$. Ainsi : $\ell = \sqrt{a}$.

$$\boxed{\text{Finalement, la suite } (u_n) \text{ converge vers } \sqrt{a}.}$$

Commentaire

Lorsqu'on a démontré qu'une suite récurrente est convergente (souvent grâce au théorème de convergence monotone), on retiendra que, pour déterminer la valeur de sa limite, il s'agit presque toujours de « passer à la limite » dans la relation de récurrence définissant la suite (u_n). Ici :

$$u_{n+1} \;=\; f(u_n)$$

20. Écrire une fonction **Python** prenant en paramètres un réel strictement positif a et un entier naturel n, et renvoyant le terme u_n de la suite de Héron associée à a.

Démonstration.
On propose le script suivant.

```
1 def suite_u(a, n) :
2     ''suite_u(a : float, n : int) -> u : float''
3     u = 1 # valeur de u_0
4     for k in range(n) :
5         u = (1/2) * (u + a/u) # mise à jour de u
6     return u
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  - × cette fonction se nomme `suite_u`,
  - × elle prend en paramètre d'entrée le réel `a` et l'entier `n`,
  - × elle admet pour variable de sortie le réel `u`

```
1 def suite_u(a, n) :
2     ''suite_u(a : float, n : int) -> u : float''
```

```
6     return u
```

  La variable `u`, qui contiendra les valeurs successives de la suite (u_n), est initialisée à 1 : la valeur de u_0.

```
3     u = 1 # valeur de u_0
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 4 à 5 consistent à calculer les valeurs successives de la suite (u_n). Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle `for`) :

```
4     for k in range(n) :
5         u = (1/2) * (u + a/u) # mise à jour de u
```

  Pour mettre à jour la variable `u`, on a utilisé la relation de récurrence définissant la suite (u_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de cette boucle, la variable `u` contient bien la valeur de u_n. En effet, puisqu'on effectue n tours de boucle, la variable `u` est mise à jour n fois. Comme cette variable contenait u_0 avant d'entrer dans la boucle, elle contient $u_{0+n} = u_n$ à l'issue des n tours de boucle.

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé avec beaucoup de précision la réponse à cette question. Cependant, proposer un script **Python** correct et brièvement commenté démontre la bonne compréhension de l'algorithme demandé et permet d'obtenir tous les points alloués à cette question.
- On pouvait aussi proposer une version récursive de cette algorithme.

```python
def suite_u(a, n) :
    ''suite_u(a : float, n : int) -> float''
    if n == 0 : # condition d'arrêt
        return 1 # valeur de u_0
    else :
        return (1/2) * (suite_u(n-1) + a / suite_u(n-1))
                # relation de récursivité (appel à la fonction)
```

Partie 3 - Étude de la vitesse de convergence

On cherche dans cette question à évaluer la *vitesse de convergence* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\sqrt{a}$. On considère pour cela l'**écart relatif réduit** de u_n à $\sqrt{a}$, défini, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\varepsilon_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$$

21. a) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\varepsilon_n \geqslant 0$ et $\varepsilon_{n+1} \leqslant (\varepsilon_n)^2$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  D'après la question ***17*** : $u_n \geqslant \sqrt{a}$. Ainsi :

$$\begin{array}{lccl} & u_n - \sqrt{a} & \geqslant & 0 \\ \text{donc} & \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} & \geqslant & 0 \qquad \textit{(car : } 2\sqrt{a} > 0\textit{)} \\ \text{d'où} & \varepsilon_n & \geqslant & 0 \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \varepsilon_n \geqslant 0}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} \qquad \textit{(par définition de } u_{n+1}\textit{)} \\ &= \frac{\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - 2\sqrt{a}}{4\sqrt{a}} \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n+1} &= \frac{\frac{u_n^2+a-2\,u_n\,\sqrt{a}}{u_n}}{4\,\sqrt{a}} \\
&= \frac{u_n^2 - 2\,u_n\,\sqrt{a} + a}{4\,u_n\,\sqrt{a}} \\
&= \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{4\,u_n\,\sqrt{a}} \\
&= \frac{\cancel{4}\,a \times \varepsilon_n^2}{\cancel{4}\,u_n\,\sqrt{a}} && \textit{(par définition de } \varepsilon_n\textit{)} \\
&= \frac{\sqrt{a}}{u_n} \times \varepsilon_n^2
\end{aligned}$$

Toujours d'après la question ***17*** : $u_n \geqslant \sqrt{a}$. Comme : $\sqrt{a} > 0$, on en déduit : $1 \geqslant \dfrac{\sqrt{a}}{u_n}$.
On en conclut :

$$1 \times \varepsilon_n^2 \;\geqslant\; \underbrace{\frac{\sqrt{a}}{u_n} \times \varepsilon_n^2}_{=\,\varepsilon_{n+1}} \qquad \textit{(car : } \varepsilon_n^2 \geqslant 0\textit{)}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varepsilon_{n+1} \leqslant (\varepsilon_n)^2}$$

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varepsilon_n \leqslant (\varepsilon_1)^{2^{n-1}}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \varepsilon_n \leqslant (\varepsilon_1)^{2^{n-1}}$.

- **Initialisation** :
  On remarque : $(\varepsilon_1)^{2^{1-1}} = (\varepsilon_1)^{2^0} = (\varepsilon_1)^1 = \varepsilon_1$. Ainsi :
  $$\varepsilon_1 \;\leqslant\; (\varepsilon_1)^{2^{1-1}}$$
  D'où $\mathcal{P}(1)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* : $\varepsilon_{n+1} \leqslant (\varepsilon_1)^{2^n}$).
  $$\begin{aligned}
  \varepsilon_{n+1} &\leqslant (\varepsilon_n)^2 && \textit{(d'après la question précédente)} \\
  &\leqslant \left((\varepsilon_1)^{2^{n-1}}\right)^2 && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
  &= (\varepsilon_1)^{2\times 2^{n-1}} \\
  &= (\varepsilon_1)^{2^n}
  \end{aligned}$$
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varepsilon_n \leqslant (\varepsilon_1)^{2^{n-1}}.}$$

□

22. On suppose dans cette question que $a \in [1,4]$.

a) Montrer alors : $\varepsilon_1 \leqslant \dfrac{1}{4}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, par définition de ε_1 :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{u_1 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} \\
&= \frac{\frac{1+a}{2} - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} && \textit{(d'après 16)} \\
&= \frac{1 + a - 2\sqrt{a}}{4\sqrt{a}} \\
&= \frac{a - 2\sqrt{a} + 1}{4\sqrt{a}} \\
&= \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

- On remarque ensuite :

$$\begin{array}{lccccl}
 & 1 & \leqslant & a & \leqslant & 4 \\
\text{donc} & 1 & \leqslant & \sqrt{a} & \leqslant & 2 & \textit{(par croissance de } \sqrt{\cdot} \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\
\text{d'où} & 0 & \leqslant & \sqrt{a}-1 & \leqslant & 1 \\
\text{ainsi} & 0 & \leqslant & (\sqrt{a}-1)^2 & \leqslant & 1 & \textit{(par croissance de } x \mapsto x^2 \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\
\text{alors} & 0 & \leqslant & \dfrac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}} & \leqslant & \dfrac{1}{4\sqrt{a}} & \textit{(car : } 4\sqrt{a} > 0\textit{)}
\end{array}$$

De plus :

$$\begin{array}{lccl}
\text{comme } 1 & \leqslant & \sqrt{a} \\
\text{alors } 1 & \geqslant & \dfrac{1}{\sqrt{a}} & \textit{(par décroissance de } x \mapsto \dfrac{1}{x} \textit{ sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\
\text{donc } \dfrac{1}{4} & \geqslant & \dfrac{1}{4\sqrt{a}}
\end{array}$$

Ainsi, par transitivité :

$$0 \leqslant \underbrace{\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}}}_{=\,\varepsilon_1} \leqslant \frac{1}{4\sqrt{a}} \leqslant \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \varepsilon_1 \leqslant \frac{1}{4}.}$$

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - \sqrt{a}| \leqslant \dfrac{1}{2^{2^n - 2}}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord, d'après ***17*** : $u_n - \sqrt{a} \geqslant 0$. Ainsi :
$$|u_n - \sqrt{a}| \;=\; u_n - \sqrt{a}$$
- De plus, d'après la question ***21b*** :
$$\varepsilon_n \;\leqslant\; (\varepsilon_1)^{2^{n-1}}$$
Ainsi, par définition de ε_n :
$$\frac{u_n - \sqrt{a}}{2\,\sqrt{a}} \;\leqslant\; (\varepsilon_1)^{2^{n-1}}$$
Comme : $2\sqrt{a} \geqslant 0$, on en déduit :
$$u_n - \sqrt{a} \;\leqslant\; (\varepsilon_1)^{2^{n-1}} \times 2\,\sqrt{a}$$
D'où :
$$|u_n - \sqrt{a}| \;\leqslant\; (\varepsilon_1)^{2^{n-1}} \times 2\,\sqrt{a}$$
- Par ailleurs :
$$\begin{array}{lrcll} & \varepsilon_1 & \leqslant & \dfrac{1}{4} & \textit{(d'après la question précédente)} \\ \text{donc} & (\varepsilon_1)^{2^{n-1}} & \leqslant & \left(\dfrac{1}{4}\right)^{2^{n-1}} & \textit{(par croissance de } x \mapsto x^{2^{n-1}} \textit{ sur } \mathbb{R}_+) \\ \text{d'où} & 2\,\sqrt{a}\,(\varepsilon_1)^{2^{n-1}} & \leqslant & \dfrac{1}{4^{2^{n-1}}}\,2\,\sqrt{a} & \textit{(car : } 2\,\sqrt{a} \geqslant 0) \end{array}$$
Or, comme démontré en question précédente : $\sqrt{a} \leqslant 2$. Ainsi :
$$\frac{1}{4^{2^{n-1}}}\,2\,\sqrt{a} \;\leqslant\; \frac{1}{4^{2^{n-1}}}\,2 \times 2$$
De plus :
$$\frac{1}{4^{2^{n-1}}}\,2 \times 2 \;=\; \frac{1}{4^{2^{n-1}}} \times 4 \;=\; \frac{1}{4^{2^{n-1}-1}} \;=\; \frac{1}{(2^2)^{2^{n-1}-1}} \;=\; \frac{1}{2^{2\times(2^{n-1}-1)}} \;=\; \frac{1}{2^{2^n-2}}$$
- On en déduit, par transitivité :
$$|u_n - \sqrt{a}| \;\leqslant\; (\varepsilon_1)^{2^{n-1}} \times 2\,\sqrt{a} \;\leqslant\; \frac{1}{4^{2^{n-1}}}\,2\,\sqrt{a} \;\leqslant\; \frac{1}{2^{2^n-2}}$$
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n - \sqrt{a}| \leqslant \frac{1}{2^{2^n-2}}}$$
□

c) En déduire que u_4, u_5 et u_6 sont alors des valeurs approchées de $\sqrt{a}$ à respectivement 10^{-4}, 10^{-9} et 10^{-18} près.
(On pourra utiliser le fait que $2^{10} > 10^3$.)

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$|u_4 - \sqrt{a}| \leqslant \frac{1}{2^{2^4-2}} = \frac{1}{2^{14}}$$

Or :

$$\begin{array}{rrcll} & 2^{10} & > & 10^3 & \textit{(d'après l'énoncé)} \\ \text{donc} & 2^4 \times 2^{10} & > & 2^4 \times 10^3 & \\ \text{d'où} & 2^{14} & > & 16 \times 10^3 \ > \ 10^4 & \\ \text{ainsi} & \dfrac{1}{2^{14}} & < & \dfrac{1}{10^4} & \textit{(par stricte décroissance de } x \mapsto \dfrac{1}{x} \textit{ sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \end{array}$$

On en déduit, par transitivité :

$$|u_4 - \sqrt{a}| \leqslant \frac{1}{2^{14}} \leqslant \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$$

$$\boxed{\text{Autrement dit, le réel } u_4 \text{ est une valeur approchée de } \sqrt{a} \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}}$$

- On démontre de même :
  - × d'une part :

$$|u_5 - \sqrt{a}| \leqslant \frac{1}{2^{30}} \leqslant 10^{-9}$$

  - × d'autre part :

$$|u_6 - \sqrt{a}| \leqslant \frac{1}{2^{62}} \leqslant \frac{1}{4 \times 10^{20}} \leqslant 10^{-18}$$

$$\boxed{\text{Autrement dit, le réel } u_5 \text{ (resp. } u_6\text{) est une valeur approchée de } \sqrt{a} \text{ à } 10^{-9} \text{ (resp. } 10^{-18}\text{) près.}}$$

□

Partie 4 - Étude de la suite de Héron dans le cas complexe

Le but de cette partie est de généraliser l'étude de la suite de Héron – et en particulier le résultat de convergence obtenu en partie 2 ci-dessus – au cas où a est un complexe non nul.

On suppose donc désormais que $a \in \mathbb{C}^*$. On note α et $-\alpha$ les deux racines carrées complexes de a, et on pose $i\alpha\mathbb{R} = \{i\alpha x \mid x \in \mathbb{R}\}$. On considère la suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in \mathbb{C} \setminus i\alpha\mathbb{R} \quad \textit{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. On note : $\Delta = b^2 - 4ac$.

On note δ une racine carrée de Δ (éventuellement complexe). Autrement dit : $\delta^2 = \Delta$.

Le polynôme $aX^2 + bX + c$ admet deux racines :

$$\frac{-b-\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad \frac{-b+\delta}{2a}$$

23. Le but de cette question est de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

a) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{a}{z}\right) = i\alpha\lambda$. Démontrer alors : $z \in i\alpha\mathbb{R}$.

Démonstration.
On sait :

$$\begin{array}{lrcl} & \dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{a}{z}\right) & = & i\alpha\lambda \\ \text{donc} & z+\dfrac{a}{z} & = & 2i\alpha\lambda \\ \text{d'où} & z^2+a & = & 2i\alpha\lambda\, z \\ \text{ainsi} & z^2-2i\alpha\lambda\, z+a & = & 0 \end{array}$$

On note alors Δ le discriminant du polynôme P défini par : $P(X) = X^2 - 2i\alpha\lambda\, X + a$.

$$\begin{array}{rcll} \Delta & = & (-2i\alpha\lambda)^2 - 4\times 1\times a & \\ & = & -4\alpha^2\lambda^2 - 4a & \\ & = & -4a\lambda^2 - 4a & \textit{(par définition de } \alpha \textit{ : } \alpha^2 = a\textit{)} \\ & = & -4a\,(\lambda^2+1) & \\ & = & \left(2i\alpha\sqrt{\lambda^2+1}\right)^2 & \end{array}$$

On note alors : $\delta = 2i\alpha\sqrt{\lambda^2+1}$.
D'après le résultat fourni dans l'énoncé, le polynôme P admet deux racines :

$$\frac{2i\alpha\lambda-\delta}{2} = 2i\alpha\,\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2+1}}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{2i\alpha\lambda+\delta}{2} = 2i\alpha\,\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}}{2}$$

Deux cas se présentent.

- si $z = 2i\alpha\,\dfrac{\lambda-\sqrt{\lambda^2+1}}{2}$, alors : $z = i\alpha\times 2\,\dfrac{\lambda-\sqrt{\lambda^2+1}}{2}$.

  On note alors : $x_1 = 2\,\dfrac{\lambda-\sqrt{\lambda^2+1}}{2}$. Comme $\lambda\in\mathbb{R}$, on a bien :
  × d'une part : $x_1 \in \mathbb{R}$,
  × d'autre part : $z = i\alpha x_1$.
  Ainsi : $z \in i\alpha\mathbb{R}$.
- si $z = 2i\alpha\,\dfrac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}}{2}$, alors : $z = i\alpha\times 2\,\dfrac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}}{2}$.

  On note alors : $x_2 = 2\,\dfrac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}}{2}$. Comme $\lambda\in\mathbb{R}$, on a bien :
  × d'une part : $x_2 \in \mathbb{R}$,
  × d'autre part : $z = i\alpha x_2$.
  Ainsi : $z \in i\alpha\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Dans tous les cas : } z \in i\alpha\,\mathbb{R}.}$$

□

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si le terme u_n est bien défini et vérifie $u_n \notin i\alpha\mathbb{R}$, alors le terme u_{n+1} est bien défini et vérifie $u_{n+1} \notin i\alpha\mathbb{R}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que le terme u_n est bien défini et : $u_n \notin i\alpha\mathbb{R}$.

- Tout d'abord, comme $u_n \notin i\alpha\mathbb{R}$, alors en particulier : $u_n \neq i\alpha \times 0$. Donc : $u_n \neq 0$.
  Ainsi, le complexe $\dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$ est bien défini et donc u_{n+1} aussi.
- Démontrons ensuite : $u_{n+1} \notin i\alpha\mathbb{R}$.
  On procède par l'absurde.
  Supposons : $\texttt{NON}(u_{n+1} \notin i\alpha\mathbb{R})$, *i.e.* : $u_{n+1} \in i\alpha\mathbb{R}$.
  Alors :
  $$\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) = u_{n+1} \ \in \ i\alpha\mathbb{R}$$
  Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :
  $$\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \ = \ i\alpha\lambda$$
  D'après la question précédente appliquée à $z = u_n$, on en déduit : $u_n \in i\alpha\mathbb{R}$.
  Absurde !

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ si le terme } u_n \text{ est bien défini et vérifie } u_n \notin i\alpha\mathbb{R}, \text{ alors le terme } u_{n+1} \text{ est bien défini et vérifie } u_{n+1} \notin i\alpha\mathbb{R}.}$$
□

c) Conclure.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \left\{\begin{array}{l} u_n \text{ bien défini} \\ u_n \notin i\alpha\mathbb{R} \end{array}\right.$.

- ▸ **Initialisation** :
  D'après l'énoncé :
  - le complexe u_0 est bien défini,
  - de plus : $u_0 \in \mathbb{C} \setminus i\alpha\mathbb{R}$. Autrement dit : $u_0 \notin i\alpha\mathbb{R}$.

  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} \text{ bien défini} \\ u_{n+1} \notin i\alpha\mathbb{R} \end{array}\right.$).
  D'après la question précédente :
  × le complexe u_{n+1} est bien défini,
  × par ailleurs : $u_{n+1} \notin i\alpha\mathbb{R}$.
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, la suite } (u_n) \text{ est bien définie (et : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \notin i\alpha\mathbb{R}).}$$
□

24. Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 = \pm\alpha$?

Démonstration.
Deux cas se présentent.

- si $u_0 = \alpha$.
  - × On commence par remarquer :
  $$u_1 \;=\; \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{a}{u_0}\right) \;=\; \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{a}{\alpha}\right) \;=\; \frac{1}{2}\,(\alpha+\alpha) \;=\; \alpha$$
  - × On démontre alors par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha$.
- si $u_0 = -\alpha$, alors on démontre avec le même raisonnement : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -\alpha$.

$$\boxed{\text{Ainsi, si } u_0 = \pm\alpha\text{, alors la suite } (u_n) \text{ est constante égale à } \pm\alpha.}$$

Commentaire

- Puisque la réponse à cette question n'est pas fournie dans l'énoncé, la mention « par récurrence immédiate » associée au 1er calcul suffit à démontrer la complète compréhension des mécanismes en jeu et permet d'obtenir la totalité des points alloués à cette question.
- On peut détailler la récurrence dans le cas : $u_0 = \alpha$.
  Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)\ :\ u_n = \alpha$.
  - ▸ **Initialisation** :
    On sait : $u_0 = \alpha$.
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* : $u_{n+1} = \alpha$).
    On remarque :
    $$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{a}{\alpha}\right) && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{1}{2}\,(\alpha+\alpha) \;=\; \alpha \end{aligned}$$
    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

  Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha$.

□

25. On suppose désormais que $u_0 \neq \pm\alpha$.

a) Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$, alors : $\ell = \pm\alpha$.

Démonstration.
Supposons que la suite (u_n) admet une limite ℓ.

- On obtient :
$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \\ {\scriptstyle n\to+\infty}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle n\to+\infty} \\ \ell & = & \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{a}{\ell}\right) \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rrcll} & 2\ell & = & \ell + \dfrac{a}{\ell} & \\ \text{donc} & \ell & = & \dfrac{a}{\ell} & \\ \text{d'où} & \ell^2 & = & a & \\ \text{ainsi} & \ell & = & \pm\alpha & \textit{(car } \alpha \textit{ est une racine carrée de } a\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien démontré que si la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ admet une limite } \ell \in \mathbb{C}, \text{ alors : } \ell = \pm\alpha.}$$

□

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq \pm\alpha$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \neq \pm\alpha$.

- **Initialisation** :
D'après l'énoncé : $u_0 \neq \pm\alpha$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* : $u_{n+1} \neq \pm\alpha$).
On procède par l'absurde.
Supposons : $\texttt{NON}(u_{n+1} \neq \pm\alpha)$. Autrement dit : $u_{n+1} = \pm\alpha$.
On traite le cas : $u_{n+1} = \alpha$ (le cas « $u_n = -\alpha$ » se traite de façon tout à fait similaire).
On remarque :

$$\begin{array}{rrcl} & \alpha & = & \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \\ \text{donc} & 2\alpha & = & u_n + \dfrac{a}{u_n} \\ \text{d'où} & 2\alpha u_n & = & u_n^2 + a \\ \text{ainsi} & 0 & = & u_n^2 - 2\alpha u_n + \alpha^2 \\ \text{alors} & 0 & = & (u_n - \alpha)^2 \\ \text{donc} & 0 & = & u_n - \alpha \end{array}$$

On en déduit : $u_n = \alpha$.
Absurde !
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq \pm\alpha.}$$

□

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère le complexe $z_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n + \alpha}$, qui est bien défini et non nul d'après **25b**.
Démontrer : $z_{n+1} = (z_n)^2$.
En déduire une expression de z_n en fonction de n et de z_0.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} + \alpha} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \alpha}{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) + \alpha} && \textit{(par définition de } u_{n+1}\textit{)} \\ &= \frac{u_n + \frac{a}{u_n} - 2\alpha}{u_n + \frac{a}{u_n} + 2\alpha} \\ &= \frac{u_n^2 - 2\alpha u_n + a}{u_n^2 + 2\alpha u_n + a} \\ &= \frac{(u_n - \alpha)^2}{(u_n + a)^2} \\ &= \left(\frac{u_n - \alpha}{u_n + \alpha}\right)^2 = (z_n)^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{z_{n+1} = (z_n)^2}$$

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : z_n = (z_0)^{2^n}$.
  - **Initialisation** :
    On remarque :
    $$(z_0)^{2^0} = z_0^1 = z_0$$
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Suppons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* : $z_{n+1} = (z_0)^{2^{n+1}}$).
    On calcule :
    $$\begin{aligned} z_{n+1} &= (z_n)^2 && \textit{(d'après le point précédent)} \\ &= \left((z_0)^{2^n}\right)^2 && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= (z_0)^{2 \times 2^n} \\ &= (z_0)^{2^{n+1}} \end{aligned}$$
    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ z_n = (z_0)^{2^n}.}$$

□

d) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \alpha\, \dfrac{1+z_n}{1-z_n} = \alpha\, \dfrac{z_n^{-1}+1}{z_n^{-1}-1}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rrcl} & z_n & = & \dfrac{u_n-\alpha}{u_n+\alpha} \\ \text{donc} & z_n\,(u_n+\alpha) & = & u_n-\alpha \\ \text{d'où} & \alpha\,(1+z_n) & = & (1-z_n)\,u_n \\ \text{ainsi} & \alpha\,\dfrac{1+z_n}{1-z_n} & = & u_n \end{array}$$

(car, comme : $z_n = \dfrac{u_n-\alpha}{u_n+\alpha}$ *et* $\alpha \neq 0$*, alors :* $z_n \neq 1$*)*

De plus :

$$\frac{1+z_n}{1-z_n} = \frac{\cancel{z_n}\left(\frac{1}{z_n}+1\right)}{\cancel{z_n}\left(\frac{1}{z_n}-1\right)} = \frac{z_n^{-1}+1}{z_n^{-1}-1}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha\,\frac{1+z_n}{1-z_n} = \alpha\,\frac{z_n^{-1}+1}{z_n^{-1}-1}.}$$

□

e) En déduire que l'on a l'alternative suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{si } |u_0-\alpha| < |u_0+\alpha|, \text{ alors la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } \alpha. \\ \text{si } |u_0-\alpha| > |u_0+\alpha|, \text{ alors la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } -\alpha. \end{array}\right.$$

Démonstration.
Deux cas se présentent.

- si $|u_0-\alpha| < |u_0+\alpha|$, alors :

$$\begin{array}{rcccl} & \dfrac{|u_0-\alpha|}{|u_0+\alpha|} & < & 1 & \textit{(car : } |u_0+\alpha| > 0\textit{)} \\ \text{donc} & \left|\dfrac{u_0-\alpha}{u_0+\alpha}\right| & < & 1 & \\ \text{d'où} & |z_0| & < & 1 & \end{array}$$

Or, d'après la question ***25c*** :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = (z_0)^{2^n}$$

La suite (z_n) est donc une suite extraite d'une suite géométrique de raison géométrique z_0. Comme : $|z_0| < 1$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = 0$$

Or, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha\,\frac{1+z_n}{1-z_n}$$

On en déduit que la suite (u_n) converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha\,\frac{1+0}{1-0} = \alpha$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } |u_0-\alpha| < |u_0+\alpha|, \text{ alors la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } \alpha.}$$

- si $|u_0 - \alpha| > |u_0 + \alpha|$, alors :

$$\begin{array}{rccll} & \dfrac{|u_0 - \alpha|}{|u_0 + \alpha|} & > & 1 & \textit{(car : } |u_0 + \alpha| > 0\textit{)} \\ \text{donc} & \left|\dfrac{u_0 - \alpha}{u_0 + \alpha}\right| & > & 1 & \\ \text{d'où} & |z_0| & > & 1 & \\ \text{ainsi} & \dfrac{1}{|z_0|} & < & 1 & \textit{(par stricte décroissance de } x \mapsto \dfrac{1}{x} \textit{ sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ \text{alors} & \left|\dfrac{1}{z_0}\right| & < & 1 & \end{array}$$

Or, d'après la question ***25c*** :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{z_n} = \frac{1}{(z_0)^{2^n}} = \left(\frac{1}{z_0}\right)^{2^n}$$

La suite $\left(\dfrac{1}{z_n}\right)$ est donc une suite extraite d'une suite géométrique de raison géométrique $\dfrac{1}{z_0}$.
Comme : $\left|\dfrac{1}{z_0}\right| < 1$, alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{z_n} = 0$$

Or, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha \, \frac{\frac{1}{z_n} + 1}{\frac{1}{z_n} - 1}$$

On en déduit que la suite (u_n) converge et :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha \, \frac{0+1}{0-1} = -\alpha$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } |u_0 - \alpha| > |u_0 + \alpha|, \text{ alors la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tend vers } -\alpha.}$$

□

26. Interpréter géométriquement l'ensemble $i\alpha\mathbb{R}$ en fonction des points du plan d'affixe α et $-\alpha$, ainsi que les résultats de **25e**.

Démonstration.

- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on commence par noter :
  - × A_1 le point d'affixe α,
  - × A_2 le point d'affixe $-\alpha$,
  - × B le point d'affixe $i\alpha$.

  L'image de l'ensemble $i\alpha\mathbb{R}$ est alors la droite (OB).

De plus :

- × comme l'affixe de A_2 est l'opposée de celle de A_1, alors O est le milieu du segment $[A_1A_2]$. (En particulier, la droite (OA_1) et (A_1A_2) sont confondues).
- × comme l'affixe du point B est $i \times \alpha$ et que α est l'affixe de A_1, alors B est l'image de A_1 par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
  Ainsi les droites (OB) et (OA_1) sont perpendiculaires. On en déduit que les droites (OB) et (A_1A_2) sont perpendiculaires.

La droite (OB) coupe donc le segment $[A_1A_2]$ en son milieu et perpendiculairement. Il s'agit donc de la médiatrice du segment $[A_1A_2]$.

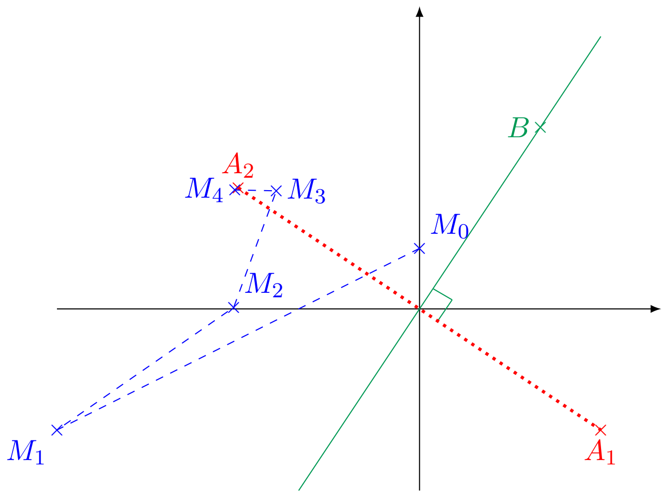
L'image de l'ensemble $i\alpha\mathbb{R}$ est la médiatrice du segment d'extrémités les points d'affixe α et $-\alpha$.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note M_k le point d'affixe u_k.
  Dans la question précédente, on a démontré que :
  - × si $|u_0 - \alpha| < |u_0 + \alpha|$, alors la suite (u_n) converge vers α.
    Autrement dit, si $A_1M_0 < A_2M_0$, alors la suite de points (M_n) converge vers A_1 (pour la distance euclidienne).
  - × si $|u_0 - \alpha| > |u_0 + \alpha|$, alors la suite (u_n) converge vers $-\alpha$.
    Autrement dit, si $A_1M_0 > A_2M_0$, alors la suite de points (M_n) converge vers A_2 (pour la distance euclidienne).

  On en déduit que la suite de points (M_n) converge vers :
  - × le point A_1, si M_0 est plus proche de A_1 que de A_2,
  - × le point A_2, si M_0 est plus proche de A_2 que de A_1.

  Finalement, on a démontré en question précédente que la suite de points (M_n) converge vers celui des points A_1 ou A_2 qui est le plus proche de M_0.

- Voici une illustration des premiers termes de la suite de Héron avec $a = 5-12i$ (et donc $\alpha = 3-2i$ car : $(3-2i)^2 = 5-12i$), et $u_0 = i$.
  On conserve les notations des points précédents.



□