

DS4 /110



On traitera **OBLIGATOIREMENT** les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 5. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours /16

1. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$2xy' + y = x^4 \quad (E_1)$$

- 1 pt : L'ensemble des solutions de l'équation (H_1) est donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{2} \ln(x)} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda \frac{1}{\sqrt{x}} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

- 2 pts : la fonction $x \mapsto \frac{1}{9} x^4$ est une solution particulière de (E_1)
- 1 pt : L'ensemble des solutions de (E_1) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{9} x^4 + \lambda \frac{1}{\sqrt{x}} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

2. (*) Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^x \quad (E_2)$$

- 1 pt : L'ensemble des solutions de (H_2) est donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda_1 e^{3x} + \lambda_2 x e^{3x} \end{array} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- 2 pts : la fonction $x \mapsto \frac{1}{4} (x+2)e^x$ est solution particulière de (E_2)

3. On note E l'ensemble des fonctions définies sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et bornées.

Pour tout $f \in E$, on note : $A_f = \{ |f(x)| \mid x \in [0, 1] \}$.

Pour tout $f \in E$, on note : $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = \sup(A_f)$.

a) Que signifie $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E ?

- 2 pts : 1 pt si 2 propriétés parmi les 3, 0 pt si 0 ou 1 propriété

b) Démontrer que $\|\cdot\|_\infty$ est homogène.

- 1 pt : $\|f\|_\infty$ bien définie car...
- 1 pt : cas $\lambda = 0$
- 2 pts : reste (1 pt par inégalité)

4. Énoncer et démontrer le théorème d'encadrement.

- 1 pt : énoncé
- 2 pts : démonstration

Exercice 2 /33

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note I_n la fonction définie par :

$$I_n : x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch}^n(t)} dt$$

5. Justifier que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n(x)$ est bien définie.

- **1 pt : La fonction $f_n : t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}^n(t)}$ est continue sur le SEGMENT $[0, x]$ car...**

6. Soit $x \in \mathbb{R}$.

a) Calculer $I_0(x)$ et $I_2(x)$.

- **1 pt : $I_0(x) = x$**
- **2 pts : $I_2(x) = 1 - \frac{1}{2(e^{2x} + 1)}$**

× **1 pt : changement de variable** $u = e^t$

× **1 pt : reste du calcul**

b) Montrer, à l'aide du changement de variable $u = e^t$: $I_1(x) = 2 \arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}$.

- **1 pt : $I_1(x) = 2 \int_1^{e^x} \frac{1}{u + \frac{1}{u}} \times \frac{1}{u} du$ (avec le changement de variable $u = e^t$)**
- **1 pt : reste du calcul**

7. a) Démontrer, pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$: $\arctan(u) + \arctan\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2}$.

- **1 pt : la fonction $g : u \mapsto \arctan(u) + \arctan\left(\frac{1}{u}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car...**
- **1 pt : $\forall u \in \mathbb{R}, g'(u) = 0$. La fonction g est donc constante sur $\mathbb{R}$.**
- **1 pt : passage à la limite quand $u \rightarrow +\infty$ (ou autre choix) pour démontrer que la fonction g est constante égale à $\frac{\pi}{2}$.**

b) En déduire que la fonction I_1 est impaire.

- **1 pt : $e^x \in \mathbb{R}_+^*$ donc on peut appliquer la question précédente**

c) Démontrer que la fonction I_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt : dérivabilité + stricte monotonie**

8. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer :

$$(n+1) I_{n+2}(x) = n I_n(x) + \frac{\operatorname{th}(x)}{\operatorname{ch}^n(x)}$$

(On pourra remarquer, au choix : $\frac{1}{\operatorname{ch}^n(t)} = \frac{\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{ch}^{n+1}(t)}$ ou $\frac{1}{\operatorname{ch}^{n+2}(t)} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t) \operatorname{ch}^n(t)}$.)

- **1 pt : $I_n(x) = \left[\operatorname{sh}(t) \times \frac{1}{(\operatorname{ch}(t))^{n+1}} \right]_0^x - \int_0^x \operatorname{sh}(t) \times \left(-(n+1) \frac{\operatorname{sh}(t)}{(\operatorname{ch}(t))^{n+2}} \right) dt$ (par intégration par parties)**

- 1 pt : utilisation de : $\operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t) = 1$
- 1 pt : fin du calcul

b) En déduire les expressions de $I_3(x)$ et $I_4(x)$.

- 1 pt : $I_3(x) = \arctan(e^x) - \frac{\pi}{4} + \frac{\operatorname{th}(x)}{2 \operatorname{ch}(x)}$
- 1 pt : $I_4(x) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3(e^{2x} + 1)} + \frac{\operatorname{th}(x)}{3 \operatorname{ch}^n(x)}$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cette question, on étudie la fonction I_n .

a) Étudier la parité de la fonction I_n .

- 1 pt

b) Démontrer que la fonction I_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, et expliciter sa dérivée I'_n .

- 1 pt : Par définition de la fonction I_n , cette fonction est la primitive de $f_n : t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}^n(t)}$ qui s'annule en 0.

c) Démontrer : $\forall t \in \mathbb{R}, \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \leq 2e^{-t}$.

- 1 pt

d) En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad I_n(x) \leq \frac{2^n}{n}(1 - e^{-nx})$$

- 1 pt : $\frac{1}{\operatorname{ch}^n(t)} \leq 2^n e^{-nt}$ (par croissance de $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}_+$)
- 1 pt : Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leq x$)...
- 1 pt : $\int_0^x 2^n e^{-nt} dt = \frac{2^n}{n} (1 - e^{-nx})$

e) Montrer que la fonction I_n est strictement croissante et majorée sur $\mathbb{R}$.

- 1 pt : I_n strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- 1 pt : $\frac{2^n}{n}$ est un majorant de I_n sur $\mathbb{R}_+$
- 1 pt : c'est même un majorant de I_n sur $\mathbb{R}$ car I_n est croissante sur $\mathbb{R}$

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x)$.

(l'existence de cette limite est garantie par la question 8e).

a) Calculer J_1 et J_2 .

- 1 pt : $J_1 = \frac{\pi}{2}$
- 1 pt : $J_2 = 1$

b) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_{n+2} = \frac{n}{n+1} J_n$.

- 1 pt : $\operatorname{th}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ et $\operatorname{ch}^n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{nx}}{2^n}$
- 1 pt : passage à la limite dans : $I_{n+2}(x) = \frac{n}{n+1} I_n(x) + \frac{1}{n+1} \times \frac{\operatorname{th}(x)}{\operatorname{ch}^n(x)}$

c) Montrer par récurrence :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad J_{2p+1} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad J_{2p+2} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

- 1 pt : initialisation
- 3 pts : hérédité

Problème : Méthode de Héron /61

Dans tout ce problème, on désigne par a un nombre réel strictement positif fixé, et on considère la suite de Héron associée à a , i.e. la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right)$$

Partie 1 - Étude d'une fonction.

On considère l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right) \end{aligned}$$

11. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer sa dérivée.

- 1 pt : dérivabilité + $f' : x \mapsto \frac{x^2 - a}{2x^2}$

12. a) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

- 1 pt : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{a}$
- 1 pt : TV complet et justifié

x	0	$\sqrt{a}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	−	0	+
Variations de f	$+\infty \searrow \quad \quad \nearrow +\infty$ $\quad \quad \quad \sqrt{a}$		

b) L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Expliciter $f(\mathbb{R}_+^*)$.

- 1 pt : f n'est pas injective (par exemple en évaluant f en $\frac{\sqrt{a}}{2}$ et en $2\sqrt{a}$), donc f n'est pas bijective
- 1 pt : f n'est pas surjective (par exemple en justifiant que 0 n'admet pas d'antécédent par f)
- 1 pt : $f(\mathbb{R}_+^*) = [\sqrt{a}, +\infty[$

13. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer le signe de $f(x) - x$.

- 1 pt : $\begin{cases} \forall x \in]0, \sqrt{a}[, f(x) - x > 0 \\ \forall x \in [\sqrt{a}, +\infty[, f(x) - x \leq 0 \end{cases}$

b) Expliciter les points fixes de la fonction f .

- 1 pt : f admet $\sqrt{a}$ comme unique point fixe car...

14. a) Montrer que le graphe de f admet une asymptote en $+\infty$, dont on donnera une équation.

- 1 pt : la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$ est asymptote au graphe de f car...

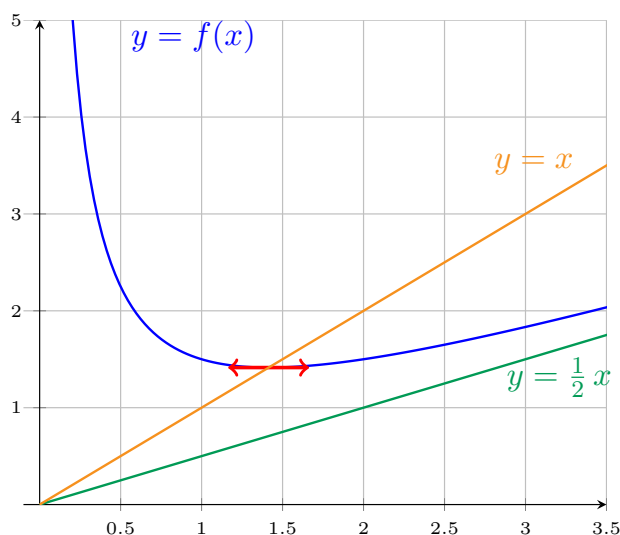
b) Étudier la position du graphe de f par rapport à cette asymptote.

- 1 pt : la courbe de f est au-dessus de son asymptote car...

15. Tracer l'allure du graphe de f dans le plan. On fera apparaître sur le graphique les asymptotes du graphe de f , ses éventuelles tangentes horizontales, ainsi que la première bissectrice du repère.

• 4 pts :

- × 1 pt : tangente en $\sqrt{a}$
- × 1 pt : asymptote
- × 1 pt 1^{ère} bissectrice
- × 1 pt : reste du graphe



Partie 2 - Étude de la suite de Héron

16. Calculer u_1 et u_2 en fonction de a .

- 1 pt : $u_1 = \frac{1+a}{2}$
- 1 pt : $u_2 = \frac{a^2 + 6a + 1}{4(1+a)}$

17. Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, et : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [\sqrt{a}, +\infty[$.

- 1 pt : initialisation
- 2 pts : hérédité
 - × 1 pt : u_{n+1} bien défini car...
 - × 1 pt : justification de $u_{n+1} \in [\sqrt{a}, +\infty[$

18. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 1.

- 1 pt : utilisation de **12a** licite car $u_n \in [\sqrt{a}, +\infty[$

19. Dédurre des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite $\sqrt{a}$.

- 1 pt : théorème de convergence monotone
- 1 pt : passage à la limite pour trouver : $\ell = \sqrt{a}$ avec la question **12b**

20. Écrire une fonction **Python** prenant en paramètres un réel strictement positif a et un entier naturel n , et renvoyant le terme u_n de la suite de Héron associée à a .

- 4 pts :
 - × 1 pt : structure de fonction et signature
 - × 1 pt : initialisation
 - × 1 pt : boucle for
 - × 1 pt : mise à jour de u

```
1 def suite_u(a, n) :  
2     'suite_u(a : float, n : int) -> u : float'  
3     u = 1 # valeur de u_0  
4     for k in range(n) :  
5         u = (1/2) * (u + a/u) # mise à jour de u  
6     return u
```

Partie 3 - Étude de la vitesse de convergence

On cherche dans cette question à évaluer la *vitesse de convergence* de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $\sqrt{a}$. On considère pour cela l'**écart relatif réduit** de u_n à $\sqrt{a}$, défini, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\varepsilon_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$$

21. a) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\varepsilon_n \geq 0$ et $\varepsilon_{n+1} \leq (\varepsilon_n)^2$.

- 1 pt : $\varepsilon_n \geq 0$
- 2 pts : $\varepsilon_{n+1} \geq \varepsilon_n$
 - × 1 pt : $\frac{\sqrt{a}}{u_n} \leq 1$
 - × 1 pt : reste

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \varepsilon_n \leq (\varepsilon_1)^{2^{n-1}}$.

- 1 pt : initialisation
- 1 pt : hérédité

22. On suppose dans cette question que $a \in [1, 4]$.

a) Montrer alors : $\varepsilon_1 \leq \frac{1}{4}$

- 1 pt : $\varepsilon_1 = \frac{(\sqrt{a} - 1)^2}{4\sqrt{a}}$
- 1 pt : $0 \leq \frac{(\sqrt{a} - 1)^2}{4\sqrt{a}} \leq \frac{1}{4\sqrt{a}}$
- 1 pt : $\frac{1}{4\sqrt{a}} \leq \frac{1}{4}$

- b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2^{2^n-2}}$.
- **1 pt** : $|u_n - \sqrt{a}| \leq (\varepsilon_1)^{2^{n-1}} \times 2\sqrt{a}$
 - **1 pt** : $(\varepsilon_1)^{2^{n-1}} \times 2\sqrt{a} \leq \frac{1}{2^{2^n-2}}$
- c) En déduire que u_4 , u_5 et u_6 sont alors des valeurs approchées de $\sqrt{a}$ à respectivement 10^{-4} , 10^{-9} et 10^{-18} près.
(On pourra utiliser le fait que $2^{10} > 10^3$.)
- **1 pt** : $|u_4 - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2^{14}} \leq 10^{-4}$
 - **1 pt** : $|u_5 - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2^{30}} \leq 10^{-9}$ et $|u_6 - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2^{62}} \leq \frac{1}{4 \times 10^{20}} \leq 10^{-18}$

Partie 4 - Étude de la suite de Héron dans le cas complexe

Le but de cette partie est de généraliser l'étude de la suite de Héron – et en particulier le résultat de convergence obtenu en partie 2 ci-dessus – au cas où a est un complexe non nul.

On suppose donc désormais que $a \in \mathbb{C}^*$. On note α et $-\alpha$ les deux racines carrées complexes de a , et on pose $i\alpha\mathbb{R} = \{i\alpha x \mid x \in \mathbb{R}\}$. On considère la suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in \mathbb{C} \setminus i\alpha\mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right)$$

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. On note : $\Delta = b^2 - 4ac$.

On note δ une racine carrée de Δ (éventuellement complexe). Autrement dit : $\delta^2 = \Delta$.

Le polynôme $aX^2 + bX + c$ admet deux racines :

$$\frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b + \delta}{2a}$$

23. Le but de cette question est de montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

- a) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\frac{1}{2} \left(z + \frac{a}{z} \right) = i\alpha\lambda$. Démontrer alors : $z \in i\alpha\mathbb{R}$.
- **1 pt** : On note alors Δ le discriminant du polynôme P défini par : $P(X) = X^2 - 2i\alpha\lambda X + a$, alors : $\Delta = (2i\alpha\sqrt{\lambda^2 + 1})^2$
 - **1 pt** : on note $\delta = 2i\alpha\sqrt{\lambda^2 + 1}$. D'après le résultat de l'énoncé, les racines de P sont :

$$\frac{2i\alpha\lambda - \delta}{2} = 2i\alpha \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{2i\alpha\lambda + \delta}{2} = 2i\alpha \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}}{2}$$

- **1 pt** : $z \in i\alpha\mathbb{R}$ dans tous les cas

- b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si le terme u_n est bien défini et vérifie $u_n \notin i\alpha\mathbb{R}$, alors le terme u_{n+1} est bien défini et vérifie $u_{n+1} \notin i\alpha\mathbb{R}$.
- **1 pt** : u_{n+1} bien défini car...
 - **1 pt** : raisonnement par l'absurde et utilisation de la question précédente avec $z = u_n$ pour démontrer : $u_{n+1} \notin i\alpha\mathbb{R}$

c) Conclure.

- 1 pt : initialisation
- 1 pt : hérédité (question précédente)

24. Que dire de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $u_0 = \pm\alpha$?

- 1 pt : si $u_0 = \pm\alpha$, alors la suite (u_n) est constante égale à $\pm\alpha$, car...

25. On suppose désormais que $u_0 \neq \pm\alpha$.

a) Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$, alors : $\ell = \pm\alpha$.

- 1 pt : passage à la limite et résolution d'équation

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq \pm\alpha$.

- 1 pt : initialisation
- 2 pts : hérédité

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère le complexe $z_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n + \alpha}$, qui est bien défini et non nul d'après **24b**.

Démontrer : $z_{n+1} = (z_n)^2$.

En déduire une expression de z_n en fonction de n et de z_0 .

- 1 pt : $z_{n+1} = (z_n)^2$
- 2 pts : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = (z_0)^{2^n}$ (1 pt si le résultat est mentionné sans démonstration)

d) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \alpha \frac{1 + z_n}{1 - z_n} = \alpha \frac{z_n^{-1} + 1}{z_n^{-1} - 1}$.

- 1 pt

e) En déduire que l'on a l'alternative suivante :

$$\begin{cases} \text{si } |u_0 - \alpha| < |u_0 + \alpha|, \text{ alors la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tend vers } \alpha. \\ \text{si } |u_0 - \alpha| > |u_0 + \alpha|, \text{ alors la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tend vers } -\alpha. \end{cases}$$

- 3 pts :
 - × 2 pts : pour le 1^{er} cas traité
 - × 1 pt : pour le 2nd cas

26. Interpréter géométriquement l'ensemble $i\alpha\mathbb{R}$ en fonction des points du plan d'affixe α et $-\alpha$, ainsi que les résultats de **24e**.

- 4 pts :
 - × 2 pts : L'image de l'ensemble $i\alpha\mathbb{R}$ est la médiatrice du segment d'extrémités les points d'affixe α et $-\alpha$.
 - × 2 pts : on a démontré en question précédente que la suite de points (M_n) converge vers celui des points A_1 ou A_2 qui est le plus proche de M_0

Toute partie de raisonnement correcte sera valorisée.